

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

**EHTİYATLARIN İDARƏ EDİLMƏSİ SİSTEMLƏRİNDƏ KÜTLƏVİ
XİDMƏT MODELLƏRİNİN TƏTBİQİ**

İxtisas: 3338.01 Sistemli analiz, idarəetmə və informasiyanın işlənməsi

Elm sahəsi: Texnika elmləri

Fəlsəfə doktoru

elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş

DİSSERTASIYA

İddiaçı: _____ **Məmməd Oqtay oğlu Şahmalıyev**

Elmi rəhbər: _____ **AMEA-nın müxbir üzvü, texnika elmləri
doktoru, professor Ağası Zərbəli oğlu
Məlikov**

Sumqayıt - 2021

Mündəricat

Giriş	4
I FƏSİL. KÜTLƏVİ XİDMƏT MODELƏRİNİN İCMALI	10
1.1. Kütləvi xidmət-ehiyatlanma sistemləri.....	10
1.2. Ehtiyatların artırılması qaydaları	14
1.3. Kütləvi xidmət-ehiyatlanma modellərinin təsnifatı.....	16
1.4. Riyazi modellərin qurulması və tədqiqat məsələlərinin qoyuluşu.....	20
1.5. Stasionar ehtimallarının hesablanması üsulları.....	25
1.5.1. Dəqiq üsullar	25
1.5.2. Təqribi üsullar	31
1.5.3. Simulyasiya üsulları.....	34
1.6. Ədədi eksperimentlərin növləri.....	36
1.6.1. Keyfiyyət göstəricilərinin analizi.....	36
1.6.2. Optimallaşdırma məsələləri	37
1.6.3. Təqribi alqoritmin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi	38
1.7. Birinci fəslin nəticələri.....	39
II FƏSİL. İKİÖLÇÜLÜ EX-KXES MODELƏRİ	41
2.1. Müxtəlif tipli sorğulu modellər	41
2.1.1. Modelin təsviri və keçid matrisinin qurulması	42
2.1.2. (s, S) qaydası tətbiq olunan model üçün təqribi üsul.....	47
2.1.3. (s, S-m) qaydası tətbiq olunan model	54
2.1.4. (S-1, S) qaydası tətbiq olunan model.....	59
2.2. Ədədi eksperimentlər	63
2.2.1. Təqribi alqoritmin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi	63
2.2.2. Fəza iriləşdirilməsi alqoritminin səmərəliliyi.....	71
2.2.3. Keyfiyyət göstəricilərinin analizi.....	71
2.2.4. Optimallaşdırma məsələləri	79
2.3. İkinci fəslin nəticələri.....	85
III FƏSİL. ÜÇÖLÇÜLÜ EX-KXES MODELƏRİ	87
3.1. Gecikən əks əlaqəli modellər	87
3.1.1. Modelin təsviri və məsələnin qoyuluşu	90
3.1.2. Stasionar ehtimalların və keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması	98
3.1.3. Sonsuz növbəli və orbitli halların tədqiqi.....	103

3.2. Təkrar sorğulu M/M/1/∞ modeli.....	104
3.2.1. Modelin təsviri və məsələnin qoyuluşu	105
3.2.2. Stasionar ehtimalların və keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması	107
3.2.3. (s, S-m) qaydası tətbiq olunan modelin simulyasiyası	108
3.3. Ədədi eksperimentlər	112
3.3.1. Təqribi alqoritmin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi	112
3.3.2. Keyfiyyət göstəricilərinin sistem parametrlərinə görə müqayisəli analizi	115
3.3.3. Təqribi düsturların simulyasiya nəticələri ilə müqayisəli analizi	118
3.3.4. Keyfiyyət göstəricilərinin EA tələbinin icra intensivliyindən asılılığı.....	121
3.3.5. Optimallaşdırma məsələlərinin həlli	122
3.4. Üçüncü fəslin nəticələri	126
Nəticə	128
Gələcək elmi tədqiqatlar üçün açıq məsələlər	131
İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısı	132
İxtisarlardan və şərti işarələrin siyahısı	141

Giriş

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Klassik KXS nəzəriyyəsində fərz olunur ki, sistemin resursları (ehtiyatları) sonsuzdur və daxil olan sorğulara xidmət göstərilməsi üçün bir (və ya bir neçə) serverin boş olması kifayətdir. Digər tərəfdən, ehtiyatların idarə edilməsi nəzəriyyəsində fərz olunur ki, sorğular ani olaraq xidmət olunur, yəni bu modellərdə növbələrin yaranması nəzərə alınmır. Lakin bu fərziyyələr bir çox real KXS-lərdə və ehtiyatların idarə edilməsi sistemlərində ödənilmir. Başqa sözlə, məhdud ehtiyatları olan KXES-lərin (Queuing-Inventory Systems, QIS) öyrənilməsi vacibdir. Bu tip modellər, əsasən, xidmət-logistika sistemlərinin riyazi modelləşdirilməsi zamanı tətbiq olunur.

Qeyd etmək lazımdır ki, KXES nəzəriyyəsinin əsasları keçən əsrin sonlarında amerikalı alimlər K. Sigman, D. Simchi-Levi və azərbaycanlı alim A. Məlikov tərəfindən qoyulmuşdur. Son dövrlərdə bu nəzəriyyə müxtəlif alimlər tərəfindən sürətlə inkişaf etdirilir.

İlkin KXES modelləri, əsasən, ehtiyatları heç vaxt xarab olmayan sistemlərin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Eyni zamanda, ehtiyatları xarab olan sistemlər (Perishable Queuing-Inventory Systems, PQIS) nisbətən az tədqiq olunmuşdur. Bu tip sistemlərə misal olaraq qan bankı sistemlərini, müxtəlif ərzaq anbarlarını və s. göstərmək olar.

Geniş tədqiq olunan KXES modellərində, bir qayda olaraq, fərz olunur ki, sorğunun xidməti başa çatdıqdan sonra anbarda ehtiyatların səviyyəsi azalır. Lakin bir çox real sistemlərdə bu fərziyyə ödənilmir. Başqa sözlə, bəzi hallarda anbarda ehtiyatların səviyyəsi xidmət başa çatdıqdan sonra dəyişməz qalır. Buna nümunə olaraq, hər hansı məhsulun satışı sistemini misal gətirmək olar. Belə ki, satıcı tərəfindən xidmət göstərilən müştəri məhsulu aldığı halda anbardakı ehtiyatların səviyyəsi azalır, əks halda isə dəyişməz qalır. Bu tip sistemlər demək olar ki, son dövrlərə qədər tədqiq olunmamış və bu istiqamətdə araşdırmalar yalnız son illərdə vüsət almağa başlamışdır.

Qeyd etmək lazımdır ki, məlum şərtlər qəbul edildikdə baxılan sistemlərin riyazi modelləri çoxölçülü Markov zəncirləri (Markov chains, MC) ilə təsvir olunur. Bunun

nəticəsində, onların keyfiyyət göstəricilərinin (Quality of Service, QoS) hesablanması üçün uyğun Markov modellərinin vəziyyətlərinin stasionar ehtimallarının tapılması məsələsi ortaya çıxır. Bu məsələ kiçik ölçülü Markov modelləri üçün heç bir problem yaratmasa da, real sistemlərin ölçüləri çox böyük olduğundan qeyd edilən məsələ ciddi hesablama çətinlikləri ilə qarşılaşır. Bu məsələnin həlli üçün ədəbiyyatdan məlum üsulların tətbiqi bir çox hallarda istənilən nəticəni vermir və buna görə də, daha səmərəli üsulların yaradılmasına ehtiyac yaranır.

Mövcud ədəbiyyatın analizi göstərir ki, ehtiyatları xarab olan sistemlər yetərinə tədqiq edilməmişdir. Buna görə, dissertasiya işində ehtiyatları xarab olan sistemlərin adekvat riyazi modelləri təklif olunmuş və onların tədqiq olunması üçün dəqiq və təqribi üsullar yaradılmışdır.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Dissertasiya işinin məqsədi yeni adekvat EX-KXES riyazi modelləri təklif etmək, onların erqodiklik şərtlərini araşdırmaq, stasionar ehtimallarını və keyfiyyət göstəricilərini hesablamaq və yaxşılaşdırmaq, həmçinin optimallaşdırma məsələlərini həll etməkdir.

Tədqiqat metodları. Dissertasiya işində qoyulan məqsədlərə nail olmaq üçün kütləvi xidmət və ehtiyatların idarə edilməsi nəzəriyyələrindən, hesablama və simulyasiya metodlarından, Markov prosesləri nəzəriyyəsinin üsullarından, həmçinin riyazi tədqiqatlar üçün nəzərdə tutulmuş proqram təminatlarından istifadə edilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar. Dissertasiya işində aşağıdakı müddəalar müdafiəyə çıxarılmışdır:

1. Reallığa adekvat olan yeni EX-KXES modellər;
2. İriölçülü və sonsuz EX-KXES modellərinin vəziyyətlərinin stasionar ehtimallarının və keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması və optimallaşdırılması üçün dəqiq və təqribi üsullar.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işindəki alınan əsas elmi yeniliklər aşağıdakılardır:

1. Ehtiyatların artırılması üçün müxtəlif qaydalardan istifadə edilməklə EX-KXES riyazi modelləri yaradılmışdır. Göstərilmişdir ki, əks əlaqə olmadıqda baxılan sistemlər ikiölçülü Markov zəncirləri (2D MC) ilə təsvir olunur.

2. Əks əlaqəli və ya orbiti olan EX-KXES-lərin riyazi modelləri yaradılmışdır. Göstərilmişdir ki, bu halda, baxılan sistemlər üçölçülü Markov zəncirləri ilə təsvir olunur.
3. Tədqiq olunan bütün modellərdə uyğun çoxölçülü Markov zəncirlərinin keçid matrisləri qurulmuş, stasionar ehtimalların tapılması üçün balans tənlikləri qurulmuş və erqodiklik şərtləri müəyyən olunmuşdur. Öyrənilən sistemlərin keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması üçün uyğun düsturlar alınmışdır.
4. Hesablama çətinliklərini aradan qaldırmaq üçün verilən ikiölçülü və üçölçülü modellər üçün uyğun olaraq fəza iriləşdirilməsi və iyerarxik fəza iriləşdirilməsi alqoritmləri tətbiq olunmuş və onların digər məlum üsullarla müqayisədə səmərəliliyi isbat edilmişdir.
5. Təklif olunan alqoritmlər əsasında öyrənilən sistemlərin modelləri üçün ədədi eksperimentlər aparılmış və optimallaşdırma məsələləri həll edilmişdir. Fəza iriləşdirilməsi və iyerarxik fəza iriləşdirilməsi alqoritmlərinin dəqiqliyi ədədi eksperimentlər vasitəsi ilə nümayiş etdirilmişdir.
6. Vəziyyətlər fəzası sonsuz olan modellərin stasionar paylanması və keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması üçün simulyasiya alqoritmləri tətbiq edilmişdir.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Təqdim olunan modelləri anbarı xarab olan ehtiyatlardan ibarət real sistemlərdə (qida/ərzaq, kimya və dərman sənayesində, qan banklarında və ehtiyat ömrü məhdud olan digər sistemlərdə) tətbiq etməklə sistemin keyfiyyət göstəricilərini hesablamaq, yaxşılaşdırmaq, müştəri məmnuniyyətini artırmaq, sistemin işini optimallaşdırmaq, anbarda izafi ehtiyat saxlamağın qarşısını almaq və xarab olacaq ehtiyatların həcmi minimallaşdırmaq mümkündür. Əlavə olaraq, təklif olunmuş təqribi alqoritmlər iriölçülü və sonsuz keçid matrisli modellərinin stasionar ehtimallarını və keyfiyyət göstəricilərini yüksək dəqiqliklə hesablamağa imkan verir.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işinin nəticələri aşağıdakı beynəlxalq və respublika səviyyəli elmi konfranslarda müzakirə edilmişdir:

1. Ümummillî lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 93-cü ildönümünə həsr olunmuş Gənc Tədqiqatçıların IV Beynəlxalq Elmi Konfransında (Bakı, 29-30 Aprel 2016).
2. Terpuqov adına “İnformasiya texnologiyaları və riyazi modelləşdirmə” XV beynəlxalq konfransında (Tomsk, Oktyabr 2016).
3. Terpuqov adına “İnformasiya texnologiyaları və riyazi modelləşdirmə” XVI beynəlxalq konfransında (Kazan, Sentyabr-Oktyabr 2017).
4. Terpuqov adına “İnformasiya texnologiyaları və riyazi modelləşdirmə” XVII beynəlxalq konfransında (Tomsk, 10-15 Sentyabr 2018).
5. Azərbaycan Xalq Cümhuriyyətinin 100 illik yubileyinə həsr olunmuş “İnformasiya Sistemləri və Texnologiyalar. Nailiyyətlər və Perspektivlər” beynəlxalq elmi konfransında (Sumqayıt, 15-16 Noyabr 2018).
6. “International Conference on Advances in Applied Probability and Stochastic Processes” beynəlxalq konfransında (Kottayam, Hindistan, 7-10 January 2019).

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi “Azərbaycan Hava Yolları” QSC Milli Aviasiya Akademiyasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiya işinin həcmi və strukturu. Dissertasiya işinin ümumi və struktur bölmələrinin işarə ilə həcmi təqribi olaraq aşağıdakı qaydada paylanmışdır:

- Ümumi – 180000 işarə
- Giriş – 11000 işarə
- Birinci fəsil – 55000 işarə
- İkinci fəsil – 60000 işarə
- Üçüncü fəsil – 52000 işarə
- Nəticə – 6500 işarə

Birinci fəsildə məlum KXES və EX-KXES modellərinin icmal və mövcud ədəbiyyatın analizinin nəticələri təqdim olunmuşdur. İlk paraqrafda EX-KXES nəzəriyyəsinin inkişaf mərhələləri, növləri, həmçinin istifadə olunacaq üsullar

haqqında məlumat verilmişdir. Ehtiyatların artırılması (EA) üçün məlum olan müxtəlif sxemlər (qaydalar) təsvir edilmiş, fərqləri və oxşar cəhətləri göstərilmişdir. Burada, həmçinin EX-KXES-lərin modelləşdirilməsi məsələlərinin həllinə Markov zəncirlərinin tətbiqi problemləri araşdırılmış və tədqiq olunacaq məsələlərin riyazi qoyuluşu verilmişdir. Baxılacaq məsələlərin həlli üçün məlum dəqiq və təqribi üsullar, həmçinin simulyasiya alqoritmləri təsnif edilmişdir. Fəslin sonunda dissertasiyada aparılacaq ədədi eksperimentlər və optimallaşdırma məsələləri haqqında məlumat verilmişdir.

İkinci fəsildə anbarda ehtiyatların səviyyəsi və növbədəki sorğuların sayı ilə təsvir edilən müxtəlif tipli sorğuları olunan ikiölçülü EX-KXES modellərinə baxılmışdır. Bu modellərdə xidmət prosesi müsbət təsadüfi kəmiyyətdir və onun paylanma funksiyasının eksponensial olduğu fərz edilir. Xidmət olunduqdan sonra ehtiyat əldə edən və ya əliboş sistemi tərk edən olmaqla sorğular təsnif edilir. Sistemlərin reallığa uyğunluğunu (adekvatlığını) artırmaq məqsədilə növbədə gözləyən sorğuların anbarda ehtiyat olmadıqda səbirsiz olub təsadüfi vaxtlarda sistemi tərk etməsi fərz olunur. Araşdırılan modellərdə ehtiyatların artırılması üçün müxtəlif qaydalar tətbiq olunur və sistemin stasionar halda davranışının onlardan asılılığı analiz edilir. Hər bir sistem üçün uyğun ikiölçülü Markov zəncirləri və keçid matrisləri qurulmuş, keyfiyyət göstəriciləri müəyyən edilmişdir. Stasionar paylanmanın hesablanması üçün dəqiq və təqribi üsullar təsvir olunmuşdur. Fəslin sonunda uyğun ədədi eksperimentlərin nəticələri göstərilmiş, EA qaydalarına uyğun QoS-ların asılılıq qrafikləri təqdim edilmişdir. Əlavə olaraq, müxtəlif məqsəd funksiyaları üçün optimallaşdırma məsələləri həll edilmiş və ikiölçülü/üçölçülü qrafiklər vasitəsilə təsvir olunmuşdur.

Üçüncü fəsildə anbardakı ehtiyatların səviyyəsi, növbənin və əks əlaqə orbitinin vəziyyəti ilə müəyyən edilən müxtəlif növ üçölçülü Markov zəncirləri ilə təsvir olunan EX-KXES modellərinə baxılmışdır. Bu modellərin ikiölçülü modellərdən fərqi ondadır ki, sistemi tərk edən sorğular müvəqqəti orbitə qoşulur və təsadüfi vaxtlarda xidmət üçün orbitdən sistemə təkrar daxil olurlar. Bu modellər üçün uyğun üçölçülü Markov modelləri və keçid matrisləri qurulmuş, müxtəlif keyfiyyət göstəriciləri müəyyən

edilmişdir. Stasionar paylanmanın hesablanması üçün iyerarxik fəza iriləşdirilməsi alqoritmindən və simulyasiya üsullarından istifadə edilmişdir. QoS-ların hesablanması üçün dəqiq və təqribi düsturlar alınmışdır. Fəslin sonunda uyğun ədədi eksperimentlərin nəticələri göstərilmiş, EA qaydalarına uyğun QoS-ların asılılıq qrafikləri və müqayisəli analizi təqdim edilmiş, həmçinin iyerarxiyalı fəza iriləşdirilməsi alqoritminin dəqiqliyi və praktiki səmərəliliyi isbat olunmuşdur. Əlavə olaraq, müxtəlif məqsəd funksiyaları təqdim olunmuş və uyğun optimallaşdırma məsələləri həll edilmişdir.

Nəticədə dissertasiyada alınmış nəticələr, gələcək üçün görülməli işlər və yeni məsələlər xülasə edilmişdir.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısında dissertasiyada istinad olunmuş elmi işlərin siyahısı verilmişdir.

I FƏSİL. KÜTLƏVİ XİDMƏT MODELƏRİNİN İCMALI

1.1. Kütləvi xidmət-ehiyatlanma sistemləri

İnformasiya texnologiyalarının sürətli inkişafı ilə mürəkkəb riyazi hesablamaların, riyazi modelləşdirmənin maşınlar və kompüter texnikası vasitəsilə həyata keçirilməsinə əlverişli şərait yaranmışdır. Nəticədə, real sistemlərin riyazi olaraq virtuallaşdırılması, modelləşdirilməsi və simulyasiyası son onilliklərdə alimlərin əsas tədqiqat obyektlərindən olmuşdur. Bu istiqamətdə intensiv tədqiq olunan elm sahələrindən biri də KXS nəzəriyyəsidir.

KXS nəzəriyyəsi, əsasən, gözləmə proseslərini tədqiq edir. Gözləmə prosesi dedikdə geniş mənada növbənin yaranması nəzərdə tutulur. Məsələn, şəbəkə sistemlərində, supermarketlərdə, yanacaq doldurma məntəqələrində və s. növbə anlayışı fərqli mənalarda istifadə edilir. KXS nəzəriyyəsinin əsası danimarkalı riyaziyyatçı-mühəndis A. Erlang tərəfindən XX əsrin əvvəllərində qoyulmuşdur və telefon qovşaqlarında trafik idarə edilməsi ilə bağlı olmuşdur [27, s.1-2]. Hətta telefon şəbəkələrində trafik yükünün ölçülməsi üçün erlang adlı vahid daxil edilmişdir.

A. Erlangın işlərindən sonra riyaziyyatçılar ehtimal nəzəriyyəsinin üsullarını bu məsələlərə geniş tətbiq etməyə başlamışlar. İlk dövrlərdə bu sahədə əsas nəzəri nəticələr A.Kolmoqorov, Y.Xinçin, B.Qnedenko, A.Kendall və başqa alimlər tərəfindən alınmışdır [3, 17, s.4-7, 36, 43, s.151]. Sonradan, KXS nəzəriyyəsi tətbiqi ehtimal nəzəriyyəsinin bir bölməsi oldu və onun bir çox nəticələri əməliyyatların tədqiqində, kompüter elmində, telekommunikasiyada, trafik mühəndisliyində, ehtiyatların idarə olunmasında tətbiq olunmağa başladı. Hal-hazırda, KXS nəzəriyyəsinin kompüter-kommunikasiya sistemlərində tətbiqi teletrafik nəzəriyyəsi adı ilə müstəqil tədqiq olunan elm sahəsinə çevrilmişdir [1, s.114-115].

KXS-lərin geniş tədqiq olunan növlərindən biri məhdud ehtiyatlı sistemlərdir və ingilis dilli ədəbiyyatda onlar “Queuing-Inventory Systems”, QİS kimi tanınır. KXES modellər ilk dəfə olaraq azərbaycanlı alim A. Məlikovun [58] və amerikalı alimlər K. Sigman və D. Simchi-Levinin [89] işlərində tədqiq olunmuşdur. KXES-in riyazi

modellərində gözləmə proseslərindən əlavə anbar prosesləri də nəzərə alınmışdır. Bu modelləri tədqiq edən digər alimlərə A. Krishnamoorthy, Wein, G. Sivakumar, R. Jayaraman, Amirthakodi kimi tədqiqatçıları nümunə gətirmək olar. KXES-lərin ən çox tədqiq olunduğu ölkələr isə Amerika, Hindistan, Çin, Kanada və Azərbaycandır. Mövzu ilə bağlı ədəbiyyat araşdırmasının nəticələri Cədvəl 1.1.1-də təqdim olunmuşdur.

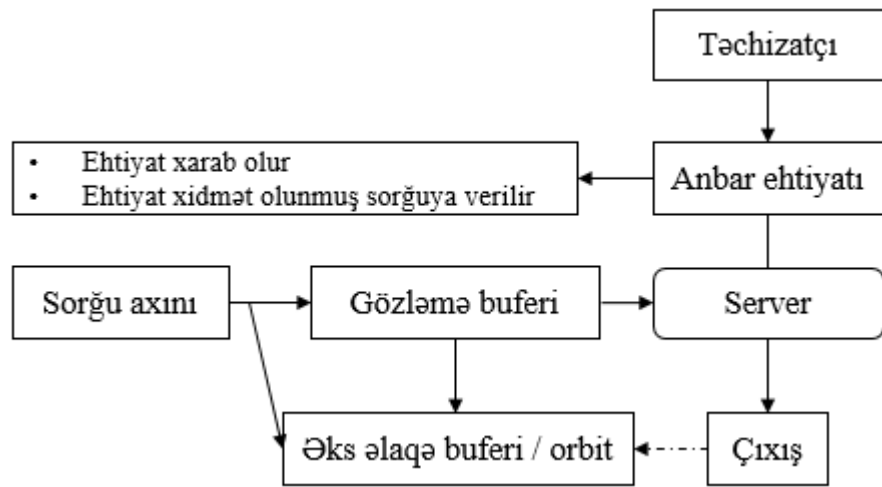
Cədvəl 1.1.1 KXES nəzəriyyəsi ilə əlaqədar ədəbiyyat araşdırmasının nəticələri

Jurnallar üzrə		Müəssisələr üzrə	
Jurnal	#	Müəssisə	#
Operations Research	55	Cochin University of Science and Technology	15
European Journal of Operational Research	53	Institute of Control Systems	9
Management Science	36	Columbia University in the City of New York	6
Annals of Operations Research	26	Rotman School of Management	6
International Journal of Production Economics	23	University of Minnesota Twin Cities	6
Queueing Systems	22	Fuqua School of Business	4
Computers & Operations Research	14	Iran University of Science and Technology	4
Computers & Industrial Engineering	13	University of Madras	4
International Journal of Production Research	13	University of Waterloo	4
Naval Research Logistics (NRL)	13	Yanshan University	4
Manufacturing & Service Operations Management	12	Asian Institute of Technology Thailand	3
		Gordon College	3
		Hong Kong University of Science and Technology	3
		Krannert School of Management	3
		Madurai Kamaraj University	3
		Middle East Technical University (METU)	3
		MIT Sloan School of Management	3
		Northwestern University	3
		Seattle	3
		Shanghai Jiao Tong University	3
		Technische Universiteit Eindhoven	3
		Universität Hamburg	3
		University of Washington	3
		Wenham	3
Müəlliflər üzrə		Ölkələr üzrə	
Müəllif	#	Ölkə	#
A. Krishnamoorthy	16	United States	73
L. Wein	15	India	38
A. Melikov	9	China	20
J. Gayon	9	Canada	15
P. Zipkin	9	Azerbaijan	10
S. Benjaafar	9	France	9
D. Shajin	8	Iran	8
Y. Lu	8	Taiwan	7
F. Karaesmen	7	Turkey	7
M. Elhafsi	7	Germany	6
		United Kingdom	6

Cədvəl 1.1.1-də təqdim olunan məlumatlar 1990-2019-cu illər aralığında yüksək beynəlxalq indeksli jurnallarda mövzu ilə əlaqədar ingiliscə nəşr olunan məqalə sayının paylanmasını nümayiş etdirir. Cədvəldə “#” işarəsi məqalələrin sayını göstərir.

Cədvəldən görüldüyü kimi, Azərbaycanın mövzu ilə bağlı əhəmiyyətli töhvəsi olmuşdur. Cədvəlin hazırlanmasında Sciencedirect, Springer, IEEE, Tandofline, ACM, İnderscience və s. mənbələrdən istifadə olunmuşdur.

Tədqiq olunan KXES-lərin əsas tərkib hissələrinə sorğular axını, gözləmə buferi və ya növbə, xidmətçi server(lər), anbar ehtiyatı, təchizatçı və ya EA xidmətləri, əks əlaqə buferi və ya orbit daxildir. Bu komponentlərin hər biri ayrılıqda təsadüfi proseslərlə və təsadüfi kəmiyyətlərlə modelləşdirilir. Bir serverli sadə KXES strukturu Şəkil 1.1.1-də təsvir edilmişdir.



Şəkil 1.1.1 KXES modelinin struktur sxemi

Sorğular axını sorğuların sistemə daxil olması prosesini təsvir etmək üçün istifadə olunur. Bu məqsədlə öz xarakteristikalarına, hesablama və riyazi modelinin sadəliyinə görə daha çox Puasson daxilolma prosesindən istifadə olunur [101]. Puasson axınında fərz olunur ki, sorğular sistemə stabil intensivliklə eksponensial paylanmış vaxt aralıqlarında daxil olurlar. Puasson axını MAP prosesinin xüsusi halıdır. Sorğular axınının reallığa uyğunluğunu artırmaq məqsədilə bəzən MAP-in digər daha mürəkkəb növləri olan MMPP (Markov-modulated Poisson process) və ya faza tipli (Phase-type renewal process, PH) axınlardan istifadə edilir və bu axınlardan intensivliyinin dəyişkən və dəyişmə aralıqlarının təsadüfi kəmiyyət olduğu fərz edilir [21, 29, s.149-150, 47, s.158-159, 59, s.231].

Xidmətçi server KXES sistemlərində daxil olan sorğuya xidmət göstərən elementi təsvir etmək üçündür. Sistemə daxil olan hər bir sorğu boş olan server tərəfindən xidmətə qəbul edilir və xidmət vaxtı ərzində uyğun serverə məşğul statusu mənimsədilir. Məşğul server cari sorğunun xidməti bitməyə qədər yeni sorğu qəbul etmir. Serverin xidmət vaxtı ani, statik və ya təsadüfi kəmiyyətlə təsvir oluna bilər. Hesablama sadəliyini və reallığa maksimal uyğunluğu təmin etmək məqsədilə xidmət vaxtı daha çox eksponensial paylanmış təsadüfi kəmiyyətlə ifadə edilir.

Gözləmə buferi vasitəsilə sistemə daxil olan sorğuların server(lər) məşğul olduqda xidməti almaq üçün öz növbəsini gözlədiyi yer təsvir edilir. Gözləmə buferinin uzunluğu məhdud və ya sonsuz ola bilər. Fərz edilə bilər ki, gözləmə buferində olan sorğular müxtəlif səbəblərdən səbirsiz olub növbəni təsadüfi vaxtlarda tərk edir. Bu növ sorğular **səbirsiz sorğular** adlanır.

Əks əlaqə buferi və ya orbit KXES modellərinin digər komponenti olub müxtəlif məqsədlər üçün istifadə edilir, sistemin reallığa uyğunluğunu artırır və daha çox üçölçülü modellərin təsvirində tətbiq edilir. Məsələn, fərz olunur ki, gözləmə buferini tərk edən səbirsiz sorğular sistemi tamamilə tərk etmir, Bernulli sxeminə əsasən orbitə daxil olub sorğusunu təsadüfi vaxtdan sonra təkrarlayır [60, s.55]. Digər nümunə, fərz edilir ki, xidmət olunmuş sorğu anbar ehtiyatı əldə etmədən son qərarını vermək üçün müəyyən ehtimalla əks əlaqə buferinə daxil olur [60, s.55, 61, s.83-84].

Anbar ehtiyatı sistemdə ehtiyatların səviyyəsini müəyyən edir. Anbarın həcmi məhdud qəbul olunur. Fərz edilir ki, sorğu xidmət olunduqdan sonra anbardan ehtiyat əldə etdikdə anbar ehtiyatının səviyyəsi bir vahid azalır. Ehtiyatları xarab olan anbar idarə etmə modellərində isə anbarın səviyyəsi, əlavə olaraq, ehtiyatların xarab olması səbəbindən də azala bilər. Bu zaman ehtiyatların xarab olma intensivliyi, əsasən, eksponensial paylanmış təsadüfi kəmiyyətlə ifadə edilir.

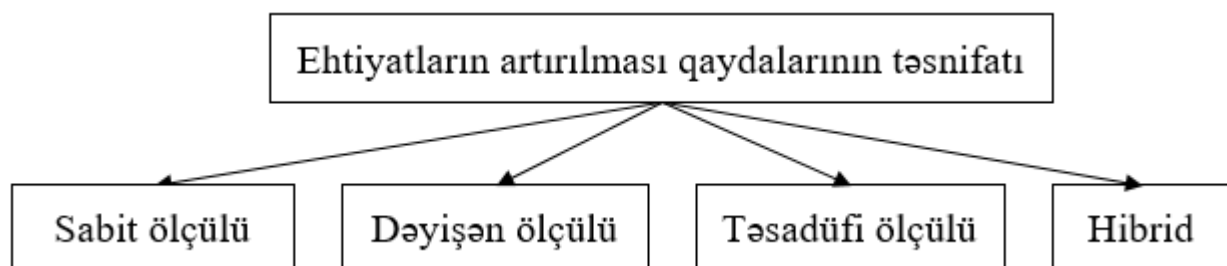
Ehtiyatların artırılması xidməti hər bir KXES modelinin vacib komponentidir və anbarı dolduran proses(lər)in riyazi təsviri üçün istifadə olunur. Anbar ehtiyatı azaldıqda və öncədən müəyyən edilmiş şərtlər ödəndikdə sistem anbar ehtiyatının artırılması üçün tələb (və ya EA tələbi) yerləşdirir. EA tələbinin icra vaxtı, adətən, eksponensial paylanmış təsadüfi kəmiyyətlə ifadə edilir.

1.2. Ehtiyatların artırılması qaydaları

Anbar ehtiyatı komponenti KXES modellərində ehtiyatların idarə olunmasını və xidməti bitmiş sorğulara ehtiyatın verilməsini təmin edir. Xidmət olunmuş sorğu anbardan ehtiyat əldə etdikdə və ya anbarda ehtiyatlar xarab olduqda ehtiyatların səviyyəsi aşağı düşür. Nəticədə, sorğuların davamlı xidmətini təmin etmək, sorğuların itirilməsinin qarşısını almaq və anbarda kifayət qədər ehtiyatların olmasını təmin etmək üçün ehtiyatların periodik olaraq artırılmasına ehtiyac yaranır. Anbar ehtiyatlarının artırılması prosesi ehtiyatların artırılması xidməti (və ya təchizatçı) vasitəsilə reallaşdırılır. Artırılma prosesi isə ehtiyatların artırılması (EA) qaydasına əsasən müəyyən edilir. EA qaydası seçimi KXES-in uzunmüddətli və ya stasionar halda optimallaşdırılmasında və keyfiyyət göstəricilərinin yaxşılaşdırılmasında mühüm rol oynayır.

EA qaydası iki əsas elementlə müəyyən edilir: EA *həddi* və EA *həcmi*. EA həddi sistem tərəfindən EA tələbinin yerləşdirilməsi qaydasını müəyyən edir və rezerv ehtiyatın saxlanması üçün nəzərdə tutulur. Anbarda ehtiyatların səviyyəsi öncədən müəyyən olunmuş EA həddinə düşdükdə dərhal EA tələbi yerləşdirilir. EA tələbinin həcmi isə anbara artırılacaq ehtiyatların sayını müəyyən edir. Məsələn, (s, S) tipli EA qaydasında anbarda ehtiyatların səviyyəsi s həddinə düşdükdə dərhal EA tələbi yerləşdirilir. Tələb yerinə yetirildikdən sonra anbarda ehtiyatların səviyyəsi $(S - s)$ qədər artırılır.

EA qaydalarını dörd əsas qrupa bölmək olar. Bu qruplara sabit, dəyişən, təsadüfi ölçülü və hibrid EA qaydaları aiddir. Şəkil 1.2.1-də bu bölgü təsvir edilir.



Şəkil 1.2.1 Ehtiyatların artırılması qaydalarının təsnifatı

Sabit ölçülü (r, Q) EA qaydasında EA tələbinin həcmi öncədən müəyyən olunmuş sabitə bərabər qəbul edilir. Bu növ EA qaydasına geniş tətbiq olunan (s, S) -i qaydasını misal gətirmək olar [8, s.3, 11, s.25, 18, 47, 53, 54, 61, s.42-43, 73, 90, 91]. Burada fərz edilir ki, anbarın maksimal tutumu S -ə bərabərdir və anbarda ehtiyatların səviyyəsi s EA həddinə düşdükdə sistem tərəfindən dərhal EA tələbi yerləşdirilir. Tələb icra edildikdən sonra anbarda ehtiyatların səviyyəsi $(S - s)$ qədər artırılır. Təkrar EA tələblərinin qarşısını almaq məqsədilə tələb edilir ki, artırıldıqdan sonra anbarda ehtiyatların səviyyəsi s həddindən böyük olmalıdır. Buna görə, $s < S/2$ şərtinin ödənməsi zəruridir və s dəyişəninə mümkün qiymətləri $s = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{S}{2} \right\rfloor - 1$ aralığında dəyişir, burada $[a]$ - a ədədinin tam hissəsinə bərabərdir. EA həddi s sistemin idarə edilə bilən komponenti olub optimallaşdırma məsələlərinin həllində mühüm rol oynayır.

$(S - 1, S)$ sabit ölçülü EA qaydasının digər nümunəsidir [13, s.4464, 37, s.411-412, 41, s.95, 46, s.493, 63, s.493]. Bu qaydaya əsasən, anbarda ehtiyatların səviyyəsi azalan kimi dərhal sistem tərəfindən vahid ölçülü EA tələbi yerləşdirilir. Hər bir yerləşdirilən EA tələbi bir-birindən asılı olmayaraq eksponensial paylanmış vaxtlarda icra edilir və tələb yerinə yetirildikdən sonra anbarda ehtiyatların səviyyəsi bir vahid artır. (s, S) EA qaydası tətbiq olunan sistemlərdən fərqli olaraq eyni zamanda icra edilən tələblərin sayı birdən çox ola bilər. Bu isə paralel olaraq bir neçə EA xidmətindən yararlanmağa imkan verir.

Dəyişən ölçülü (VSO) EA qaydası sabit ölçülü EA qaydasının daha ümumi forması olub yerləşdirilən EA tələbinin sabit deyil, dəyişən həcmli olmasını fərz edir [19, s.429, 64, s.373, 87, s.60-61]. Dəyişən ölçülü EA qaydasının ən çox istifadə olunan növü tam doldurma qaydasıdır $(s, S - m)$. Burada da (s, S) qaydasında olduğu kimi anbarda ehtiyatların səviyyəsi $s, s < S$ EA həddinə düşdükdə EA tələbi yerləşdirilir, lakin tələb icra edildikdən sonra anbara $(S - s)$ deyil, $(S - m)$ (m tələb çətdirilan anda cari ehtiyat sayını göstərir) sayda ehtiyat artırılır və anbar tam doldurulmaqla ehtiyatların səviyyəsi S -ə çətdirilir. Yəni, tam doldurma EA qaydasında tələbin həcmi

d cari ehtiyat səviyyəsindən asılıdır və $0 < d \leq S - m$. (s, S) qaydası tam doldurma qaydasının xüsusi halıdır və (s, S) üçün EA tələbinin həcmi aşağıdakı düsturla müəyyən olunur:

$$d = \begin{cases} S - s, & m \leq s \text{ olduqda,} \\ 0, & m > s \text{ olduqda} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Təsadüfi ölçülü artırılma qaydasında EA tələbinin yerləşdirilməsi vaxtları, EA həddi və ya EA tələbinin həcmi təsadüfi kəmiyyətlə müəyyən [16, s.109, 28, s.399, 100, s.1289] edilir. Məsələn, tam doldurma qaydası tətbiq edilən [27] məqaləsində EA tələbinin təsadüfi vaxtlarda yerləşdirilməsinə baxılır. Digər misal olaraq, (s^*, S) qaydasında s^* EA həddi təsadüfi kəmiyyət olub müxtəlif vaxtlarda fərqli qiymətlər ala bilər. [100]-də isə EA tələbinin həcmi təsadüfi kəmiyyətlə müəyyən edilir.

Hibrid doldurma qaydalarında isə digər EA qaydalarının “calağ”ından istifadə edilir. Məsələn, [11, s.25-26] məqaləsində fərz olunur ki, xidmət olunmuş sorğu ehtiyat əldə etdikdən sonra və ya xarab olma səbəbindən anbarda ehtiyatların səviyyəsi s həddinə düşdükdə $(S - s)$ həcmli EA tələbi yerləşdirilir. Lakin, təkrar sorğu xidmət olunduqdan sonra anbarda ehtiyatların səviyyəsi $i < s$ olduqda $S - i$ ölçülü EA tələbi yerləşdirilir. Hibrid doldurma qaydaları modelin mürəkkəbliyini artırdığı üçün çox az tətbiq olunmuşdur.

Beləliklə, EA qaydalarının təsnifatı ilə tanış olduqdan sonra növbəti paraqrafda KXES modellərinin növləri və dissertasiyanın tədqiqat obyektini olan EX-KXES modelləri haqqında ətraflı məlumat veriləcək.

1.3. Kütləvi xidmət-ehtiyatlanma modellərinin təsnifatı

Kütləvi xidmət modellərinin riyazi təsvirində **Kendal işarəmələrindən** istifadə olunur. Kendal işarəmələri 1953-cü ildə məşhur ingilis riyaziyyatçısı Kendal [44] tərəfindən $A/S/c$ kimi daxil edilmiş və sonradan $A/S/c/K/N/D$ formasına qədər böyüdülmüşdür. Sonuncu işarələmə KXES modellərinin riyazi təsviri üçün qəbul edilən standartdır. Dissertasiyada təqdim olunan modellərin riyazi təsvirində də bu işarələmədən istifadə olunur. Kendal işarələməsindəki simvolların izahı Cədvəl 1.3.1-də təqdim edilmişdir.

Cədvəl 1.3.1 Kendal işarələmələrinin təsnifatı

<p><i>A</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>M</i> – Puasson axını • <i>D</i> – Determistik və ya sabit intervallı axın • <i>MAP</i> – Markov axını • <i>MMPP</i> – Markov keçidli Puasson axını • <i>PH</i> – Faza tipli paylanma • <i>G</i> – Ümumi paylanma • <i>E_k</i> – <i>k</i> tərtibli Erlang paylanması 	<p>Sorğuların daxilolma prosesini təsvir etmək üçün istifadə edilir.</p>
<p><i>S</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>M</i> – Eksponensial paylanma • <i>D</i> – Deterministik və ya sabit paylanma • <i>MMPP</i> – Markov keçidli eksponensial paylanma • <i>PH</i> – Faza tipli paylanma • <i>G</i> – Ümumi paylanma • <i>E_k</i> – <i>k</i> tərtibli Erlanq paylanması 	<p>Sorğunun xidmət olunma prosesinin paylanma funksiyasını müəyyən edir.</p>
<p><i>c</i></p>	<p>Xidmətçi serverlərin sayını təyin edir.</p>
<p><i>K</i></p>	<p>Sistemdə sorğuların maksimal sayını müəyyən edir (növbədə və xidmətdə olan sorğuların cəmi).</p>
<p><i>N</i></p>	<p>Sorğu mənbəyinin maksimal həcmi müəyyən edir.</p>
<p><i>D</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • FIFO/FCFS (First In First Out, First Come First Served) • LIFO/LCFS (Last In First Out, Last Come Last Served) • SIRO (Serve In Random Order) və s. 	<p>Növbə nizamını müəyyən edir.</p>

Kendal işarələməsində *c*, *K* və *N* dəyişənləri sonlu və sonsuz tam qiymətlər ala bilər. Məsələn, $K = 0$ olduqda bufersiz və ya tam itkili, $K < \infty$ olduqda sonlu buferli və $K = \infty$ olduqda isə sonsuz ölçülü gözləmə buferi və ya növbəsi olan KXES sistemi alınır. Əgər işarələmədə yalnız ilk 3 simvol göstərilirsə, bu zaman qəbul edilir ki, $K = \infty$, $N = \infty$ və $D = FIFO$.

KXES-lərin növləri haqqında ətraflı məlumatı [42] məqaləsindən əldə etmək olar. KXES modellərinin ən çox tədqiq olan növlərinə qısa nəzər salaq.

Birinci növ KXES sistemləri ən sadə struktura malik olub vahid xidmət serverindən, Puasson axınlı sorğulardan ibarət xidmət vaxtı və EA tələbinin icra vaxtı eksponensial paylanmış modelləri əhatə edir. Məsələn, [82, s.65] məqaləsində $M/M/1$ tipli KXES modellərinə baxılır, müxtəlif EA qaydaları tətbiq edilir, növbənin

uzunluğunun və anbar ehtiyatının birgə stasionar paylanması hesablanır. EA tələbinin icra vaxtlarının da eksponensial paylanması qəbul edilir. Baxılan modellərdə fərz olunur ki, anbarda ehtiyat olmadıqda daxil olan sorğular itmiş sayılır. [84, s.383-384] Schwarz və Daduna məqaləsində EA tələbinin həcmi gözləmə buferinin uzunluğundan asılı olan $M/M/1$ tipli modeli tədqiq edir və stasionar paylanmanı hesablayır.

İkinci növ anbar ehtiyatı bircins olmayan ehtiyatlardan ibarət KXES sistemləri daha mürəkkəb struktura malik olub bircins olmayan anbar sistemlərini modelləşdirmək üçün istifadə edilir. [86, s.37] məqaləsində əvəzləyici ehtiyat anlayışı daxil edilir və əsas ehtiyat olmadıqda onu əvəzləyən və EA vaxtı ani olan iki növ ehtiyatın olması fərz edilir və $(S - 1, S)$ EA qaydası tətbiq edilən KXES modelinə baxılır.

Üçüncü növ KXES modellərində gələn sorğuların müxtəlif tipli olması nəzərdə tutula bilər. Məsələn, [62, s.42-43]-də iki növ sorğulara baxılır ki, bəzi sorğular xidmət vaxtı bitdikdən sonra ehtiyat əldə etmədən sistemi tərk edə bilirlər. [104, s.225] məqaləsində isə server növbədə gözləyən sorğulardan prioriteti daha üstün olanını xidmətə qəbul edir. [65, s.225] məqaləsində fərz edilir ki, bəzi sorğular sistemi tərk etdikdən sonra gələcəkdə təkrar xidmət tələb edə bilirlər. [23, 34, s.311, 40, s.15-16] işlərində də aşağı və yuxarı prioritetli sorğuları olan KXES modellərinə baxılır və [40] məqaləsində (s, S) EA qaydası tətbiq edilir. [22] məqaləsində isə anbar ehtiyatı təyin edilmiş səviyyəyə düşdükdə aşağı prioritetli sorğuların xidmətə qəbul olunması Bernulli sxeminə əsasən müəyyən ehtimalla baş verir.

Çoxserverli KXES sistemlərinin geniş araşdırılan növlərindən biri müvəqqəti söndürülən serverli modellərdir. Bu cür KXES modellərində sistemin dayanıqlı halda işini optimallaşdırmaq məqsədilə fərz edilir ki, müəyyən şərtlər daxilində bir və ya bir neçə server fəaliyyətini müvəqqəti dayandırır. [23, s.95-96] məqaləsində ilk dəfə olaraq iki serverli sistem üçün serverin istirahətə çıxması anlayışı daxil edilmişdir. Eyni müəlliflər [25, s.119] məqaləsində (s, S) EA qaydalı KXES modelində anbar ehtiyatı olmadıqda serverin istirahətə çıxmasını fərz etmişdir və bu şərt daxilində sistemə daxil olan sorğular itmiş qəbul edilirdi. [75, s.129-130] məqaləsində $M/PH/1$ tipli Markov

modelinə baxılmış və sistemdə sorğu olmadıqda və ya anbar ehtiyatı sıfıra düşdükdə serverin istirahətə çıxması fərz edilmişdir.

Təkrar sorğulu KXES sistemlərində anbar ehtiyatı sıfır olduqda daxil olan sorğular müvəqqəti orbitə yerləşdirilir və anbar ehtiyatı müəyyən səviyyəyə çatdıqda həmin orbitdən xidmətə qəbul edilir [49, s.827, 79, s.41, 93, 94].

KXES sistemlərinin digər növü dissertasiya işinin mövzusu olan **ehtiyatları xarab olan** modellərdir. EX-KXES modellərində fərz edilir ki, anbar ehtiyatı təkçə sorğu xidmət olunduqdan sonra deyil, əlavə olaraq, ehtiyatların xarab olması səbəbindən də azala bilər. Mövcud ədəbiyyatı analiz etdikdən sonra belə qənaətə gəlmək olar ki, ehtiyatları xarab olan modellər yalnız son zamanlar tədqiq olunmağa başlamışdır. Bu istiqamətdə yazılan ilk işlərə [14, 34, 40, s.95, 81] misal gətirmək olar. Bu məqalələrdə ehtiyatların xarab olması anlayışı daxil edilmiş və fərqli EA qaydalarının tətbiqi ilə modellərə baxılmışdır. Sonradan bu mövzu alimlərin diqqətini cəlb etmiş və daha mürəkkəb modellər tədqiq olunmağa başlanmışdır [18, s.464, 54, s.62-63, 55, s.483, 56, 92, s.193, 95, s.29-30, 96, s.33, 103, s.254]. Son 10 ildə yazılmış məqalələrə isə [4, 5, 6, 7, 11, 39, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 72, 87, 88, 103] nümunə gətirmək olar. Bu sahə üzrə tədqiqat aparmış və bir çox yeni modellər təqdim etmiş alimlərə isə Məlikov A., Manuel P., Sivakumar B., Arivarignan G., Sapna, Jayaraman və s. tədqiqatçıları misal gətirmək olar.

Qeyd olunan məqalələrdə araşdırılan modelləri qısa xülasə edək. [11, s.25-26] məqaləsində sonsuz ölçülü gözləmə növbəsi olan vahid serverli ehtiyatları xarab olan KXES modelinə baxılır. Bu məqalədə dəyişən ölçülü EA qaydası tətbiq edilir və EA tələbinin icra vaxtı eksponensial paylanmış təsadüfi kəmiyyətlə təsvir edilir. Xidməti bitmiş sorğular Bernulli sxeminə əsasən təkrar xidmət tələb edə bilər və sistemə təkrar sorğu kimi daxil olurlar. Təkrar və ilkin sorğuların daxilolma intensivliklərinin fərqli olması fərz edilir. Server təkrar və ya ilkin sorğunu xidmətə qəbul etməsi qərarını Bernulli sxeminə əsasən verir. Sistemin stasionar paylanması, məqsəd funksiyası və keyfiyyət göstəriciləri hesablanmışdır. Berman və Sapna [73] məqaləsində sonsuz ölçülü, ehtiyatları xarab olan bilən məhdud anbarlı və Puasson axınlı modeli analiz edir. Fərz edilir ki, anbar ehtiyatı ani artırılır, lakin xidmət vaxtının intensivliyi dəyişə

bilir. Xətti proqramlaşdırma metodlarının tətbiqi ilə sistemin işini optimallaşdıran uyğun xidmət intensivlikləri tapılmışdır. [95] məqaləsində təkrar sorğulu sonlu sorğu mənbəyi olan sistem tədqiq edilir, ehtiyatların xarab olması, təkrar sorğuların sistemə daxil olması eksponensial paylanmış təsadüfi kəmiyyətlə təsvir edilir. Sivakumar və Arivarignan [92]-da MAP axınlı iki tip sorğuları olan, ehtiyatları xarab olan vahid serverli modeli analiz edir və (s, S) EA qaydasını tətbiq edir. Manuel [54, 55] məqalələrində çox serverli KXES modellərini araşdırır. [88] məqaləsində baxılan sistemə sonlu bircins mənbədən sorğular daxil olur. Sistemdə ehtiyatları eksponensial paylanmış vaxtlarda xarab olan anbar (s, S) EA qaydası ilə bərpa edilir və EA tələbi faza tipli paylanmış vaxtda yerinə yetilir. Növbənin uzunluğunun və anbarda ehtiyatların səviyyəsinin birgə stasionar paylanması, məqsəd funksiyası və sistemin QoS göstəriciləri hesablanmış və ədədi eksperimentlərin nəticələri verilmişdir. Təqdim olunan məqalələrdə anbarda ehtiyatların xarab olması vaxtları bir-birindən asılı olmayan eksponensial paylanmış təsadüfi kəmiyyətlə ifadə edilir.

1.4. Riyazi modellərin qurulması və tədqiqat məsələlərinin qoyuluşu

İstənilən KXES modelini qurmaq üçün əvvəlcə uyğun prosesi təşkil edən komponentləri müəyyən etmək lazımdır. Hər bir KXES anbar, gözləmə buferi, əks əlaqə buferi, orbit, və s. komponentlərdən ibarətdir. Hər bir komponentin işi, əsasən, təsadüfi kəmiyyətlə ifadə edilir. Komponentlərin vəziyyət vektoru isə sistemin vəziyyətini müəyyən edir. Əgər $M/M/1$ tipli KXES modelində t anında anbar ehtiyatların səviyyəsi m və növbədə gözləyən sorğuların sayı n olarsa, bu zaman sistemin vəziyyətini (m, n) kimi işarə edə bilərik. Bu halda fərz edilir ki, sistemin cari vəziyyəti anbarda ehtiyatların sayı və növbədə gözləyən sorğuların sayı ilə müəyyən edilir. Əgər anbarın maksimal həcmi S və növbənin maksimal uzunluğu N olarsa, bu zaman sistemin bütün mümkün vəziyyətlərinin sayı $(S + 1)(N + 1)$ olur. Sistemin bütün mümkün vəziyyətlər çoxluğu **vəziyyətlər fəzası** adlanır:

$$E = \{(m, n): m = 0, 1, \dots, S; n = 0, 1, \dots, N\} \quad (1.4.1)$$

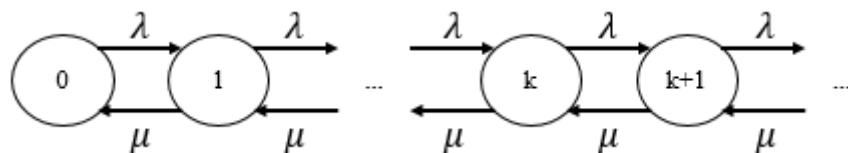
Bu halda ikiölçülü KXES sisteminə baxılır. Əgər sistemdə əlavə olaraq əks əlaqə buferi və orbit də nəzərdə tutulubsa, bu zaman KXES-in vəziyyəti üçölçülü (m, n, k) vektoru ilə müəyyən edilir ki, burada k dəyişəni orbitdə olan (və ya əks əlaqə buferində) sorğuların sayını göstərir. Vəziyyətlər fəzasında elementlərin sayı sonlu və sonsuz ola bilər.

Vəziyyətlər fəzası məlum olduqdan sonra sistemin vaxt keçdikcə vəziyyətinin dəyişməsinə riyazi olaraq təsvir etmək üçün bütün mümkün vəziyyətlər arasındakı keçidlər Markov zəncirləri vasitəsilə modelləşdirilir. Vəziyyətlər arasındakı keçid intensivlikləri isə keçid matrisi (Q-matrix) vasitəsilə göstərilir.

KXES modellərinin analitik təsviri üçün istifadə olunan əsas alət **Markov zəncirləridir**. Bu mövzu ilk dəfə 1917-ci ildə Erlang tərəfindən öyrənilmişdir [30, s.1-4]. Markov zənciri gələcəyi yalnız cari vəziyyətdən asılı hadisələr ardıcılığı olan stoxastik prosesi təsvir edir. Sistemin gələcəyinin yalnız cari vəziyyətdən asılı olması yaddaşsızlıq və ya **Markov xüsusiyyəti** adlanır (Markov property):

$$\Pr(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = \Pr(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \quad (1.4.2)$$

Markov zəncirinin ən bəsit nümunəsi **ölüm-doğum** prosesləridir (birth-death process). **Şəkil 1.4.1**-də ölüm-doğum prosesi təsvir edilmişdir. Fərz edilir ki, sistemin cari vəziyyəti k dəyişəni ilə ifadə olunur. Sistemə sorğular λ parametrlə eksponensial paylanma ilə daxil olub və μ intensivliyi ilə xidmət göstərilməklə sistemi tərk edirlər. Sistemdə vahid xidmətçi server mövcuddur və o, məşğul olduqda daxil olmuş sorğu növbəyə qoşulur. Xidmətçi server növbədə olan sorğuları FIFO prinsipi ilə xidmətə qəbul edir. Sistemin cari vəziyyəti isə növbədəki sorğuların sayı ilə müəyyən edilir.



Şəkil 1.4.1 Ölüm-doğum prosesinin təsviri

Təsvir olunan $M/M/1$ tipli modeldə sistem cari k vəziyyətindən növbəyə yeni sorğu daxil olduqda λ intensivliyi ilə $k + 1$ vəziyyətinə, sorğu xidmət olunduqdan sonra isə μ intensivliyi ilə $k - 1$ vəziyyətinə keçə bilər. Modeldə bir vəziyyətdən digərinə keçid intensivliyini $q(k_1, k_2)$ ilə işarələyək, burada k_1 cari vəziyyəti k_2 isə növbəti vəziyyəti ifadə edir. Beləliklə, vəziyyətlər arasındakı keçid intensivliklərini aşağıdakı düsturlarla ifadə etmək olar:

$$q(k_1, k_2) = \begin{cases} \lambda, & k_2 = k_1 + 1, k_2 > 0 \text{ olduqda} \\ \mu, & k_2 = k_1 - 1, k_1 > 0 \text{ olduqda} \\ 0, & \text{digər hallard} \end{cases} \quad (1.4.3)$$

Markov zəncirində sistemin vəziyyətləri arasındakı keçidlər **keçid matrisi** ilə ifadə olunur və $Q(i, j)$ işarələnir. Burada sətir indeksi i cari vəziyyəti sütun indeksi j isə növbəti vəziyyəti ifadə edir. Keçid matrisi sonlu və ya sonsuz ola bilər. (1.4.3) düsturuna əsasən **Şəkil 1.4.1**-də təsvir olunan modelin keçid matrisi əsas diaqonalından aşağıdakı element μ , yuxarıdakı element isə λ olmaqla aşağıdakı formanı alır:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & 1 - (\lambda + \mu) & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu & 1 + (\lambda - \mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu & 1 + (\lambda - \mu) & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (1.4.4)$$

KXES sistemlərinin analizində əsas məsələ sistemin stasionar halda vəziyyətlərinin paylanmasının tapılmasıdır. **Stasionar paylanma** π ilə işarələnən vektor olub sistemin uzunmüddətli fəaliyyətində vəziyyətlərin ehtimallarının paylanmasını müəyyən edir və vektorun elementlərinin cəmi vahidə bərabərdir:

$$\sum_{i \in E} \pi_i = 1, 0 \leq \pi_i \leq 1 \quad (1.4.5)$$

Əgər keçid matrisi **erqodiklik** xüsusiyyətinə malikdirsə, sistemin başlanğıc vəziyyətindən asılı olmayaraq, onun vəziyyətlərinin stasionar paylanması vektoru

yeganə π vektoruna bərabərdir [52, s.1-4]. Keçid matrisi aşağıdakı şərtləri ödədikdə erqodiklik xüsusiyyətinə malik olur:

1. Sistemin hər bir mümkün vəziyyətindən istənilən digər mümkün vəziyyətinə keçid ehtimalı müsbətdir (irreducible MC): $\Pr(X_{n_{ij}} = j \mid X_0 = i) = p_{ij}^{n_{ij}} > 0$.
2. Sistemin bütün vəziyyətləri **aperiodik rekurrentdir**. Yəni sistemin istənilən vəziyyətinə sonlu müsbət sayda addımdan sonra geri qayıtmaq ehtimalı müsbətdir.
3. Sistemdə hopdurucu vəziyyət (absorbing state) mövcud deyil. Hopdurucu vəziyyət $p_{ii} = 1, p_{ij} = 0, i \neq j$ şərtini ödəyən vəziyyətə deyilir.

Stasionar paylanmanı hesablamaq üçün **balans tənliklərindən** istifadə olunur [53, s.1-4]. Balans tənliklərini yalnız keçid matrisi məlum olduqda qurmaq mümkündür:

$$\pi_i = \sum_{j \in E} \pi_j q_{ji} \text{ və ya } \pi_i \sum_{j \in E, j \neq i} q_{ij} = \sum_{j \in E, j \neq i} \pi_j q_{ji} \text{ və ya } \pi Q = 0 \quad (1.4.6)$$

Bəzi modellərin stasionar paylanmasını hesablamaq üçün analitik düsturlar mövcuddur. İlk olaraq, $M/M/1$ tipli sonsuz növbəli, vahid serverli, Puasson axınlı və eksponensial paylanmış xidmət vaxtı olan ölmə-dirilmə modelinə baxaq (bax, **Şəkil 1.4.1**). Fərz edək ki, sorğu axının intensivliyi λ , xidmət intensivliyi isə μ ilə ifadə olunur. Bu halda, stasionar paylanma aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\pi_n = (1 - \rho)\rho^n \quad (1.4.7)$$

Burada $\rho = \lambda/\mu$ sistemin yükü adlanır və sistemin erqodikliyini təmin etmək məqsədilə fərz edilir ki, $\rho < 1$.

$M/M/1$ modelinin ümumiləşməsi olan çox serverli $M/M/c$ KXES modeli üçün stasionar paylanma bu düsturla hesablanır: [101, s.37]

$$(1.4.8)$$

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0, & 1 \leq n \leq c \text{ olduqda} \\ \frac{1}{c^{n-c} c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0, & n > c \text{ olduqda} \end{cases}$$

Burada $\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{c!(1-\rho)} \right]^{-1}$ (1.4.5) normallaşdırma şərtindən tapılır. $M/M/1$ modelindən fərqli olaraq $\rho = \lambda/c\mu$ və $r = \lambda/\mu$ qəbul edilir. Sistemin erqodikliyini təmin etmək məqsədilə fərz edilir ki, $\rho < 1$.

Hər iki modeldə qəbul edilir ki, sorğular axınının mənbəyi və növbənin uzunluğu qeyri-məhdudur.

Baxılan modellərin sonlu analoqları üçün də stasionar düsturlar mövcuddur. Belə ki, $M/M/1/N$ modelinin stasionar paylanması hesablamak üçün aşağıdakı düsturdan istifadə olunur [101, s.28]:

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{N+1}}, & \rho \neq 1 \text{ olduqda} \\ \frac{1}{N+1}, & \rho = 1 \text{ olduqda} \end{cases} \quad (1.4.9)$$

Çox serverli modelin sonlu analoqu olan $M/M/c/N$ tipli sistemin stasionar paylanması eyni qaydada (1.4.8) düsturu ilə hesablanır. Lakin, π_0 üçün normallaşdırma düsturu fərqlidir:

$$\pi_0 = \begin{cases} \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c(1-\rho^{N-c+1})}{c!(1-\rho)} \right]^{-1}, & \rho \neq 1 \text{ olduqda} \\ \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c(N-c+1)}{c!} \right]^{-1}, & \rho = 1 \text{ olduqda} \end{cases} \quad (1.4.10)$$

Yuxarıdakı modellər üçün analitik düsturlar mövcud olsa da, qeyri-standart KXES sistemlərinin stasionar paylanması hesablamak üçün analitik düsturlar həmişə almaq mümkün deyil və bunun üçün balans tənliklər sisteminin həlli tələb olunur. Balans tənliklərinin hesablanması eksponensial problemdir və onun mürəkkəbliyi, ümumilikdə, $O(n^3)$, ən yaxşı halda isə $O(n^2)$ ilə ifadə olunur. Bu isə o deməkdir ki,

sistemin ölçüsü artdıqca stasionar paylanmanın hesablanması praktiki qeyri-mümkün olur. Lakin, bəzi hallarda keçid matrisi üzərinə əlavə şərtlər tətbiq etməklə stasionar paylanmanın hesablanması üçün praktiki effektiv alqoritmlər mövcuddur.

1.5. Stasionar ehtimallarının hesablanması üsulları

Stasionar paylanmanı hesablamaq üçün balans tənliklərindən yaranan xətti tənliklər sistemini həll etmək tələb olunur. Xətti tənliklər sistemini həll etmək üçün istifadə olunan alqoritmləri üç qrupa bölmək olar. Dəqiq alqoritmlərdən matrislər üzərində əməliyyatlardan istifadə etməklə və keçid matrisi üzərinə əlavə şərtlər tətbiq etməklə stasionar paylanmanın hesablanması üçün mürəkkəbliyi nisbətən az olan üsulları əhatə edir. Təqribi üsullar isə keçid matrisi üzərinə əlavə şərtlər tətbiq olunmaqla stasionar paylanmanın hesablanması üçün analitik düsturlar təqdim etsə də, təqribi nəticə qaytarır və nəticənin dəqiqliyi ədədi eksperimentlər vasitəsilə isbat olunur. Keçid matrisi dəqiq və təqribi üsullar üçün əlverişli olmadıqda isə stoxastik simulyasiya alqoritmlərindən istifadə olunur.

1.5.1. Dəqiq üsullar

Stasionar paylanmanı hesablamaq üçün tətbiq olunan dəqiq alqoritmlər, əsasən, matrislər üzərində əməliyyatlardan, məxsusi vektorlardan və məxsusi ədədlərdən, matris dekompozisiyasından və matris cəbrinin digər elementlərindən istifadə edir. Dəqiq üsulların mürəkkəbliyi eksponensial olub yalnız kiçik ölçülü Markov zəncirləri üçün effektiv olur. Dəqiq üsulları iki əsas qrupa ayırmaq olar: balans tənliklərini birbaşa həll etməklə stasionar paylanmanın tapılması və keçid matrisi üzərində əlavə şərtlər tətbiq etmək stasionar paylanmanın hesablanması.

Xətti tənliklər sisteminin həlli üsulları. Xətti tənliklər sistemini həll etmək üçün istifadə olunan alqoritmlərdən biri QR dekompozisiyasıdır [81, s.1-2]. QR dekompozisiyası zamanı əmsal matrisi $A = QR$ matrislərinin hasili şəklində göstərilir və burada Q ortoqonal matris, R isə üst üçbucaqvari matrisdir. Ortoqonal matris $QQ^T = I$ şərtini ödəyən matrisə deyilir. QR dekompozisiya hesablandıqdan sonra xətti tənliklər sistemi aşağıdakı qaydada həll edilir:

$$A \cdot x = b \rightarrow QR \cdot x = b \rightarrow Q^T QR \cdot x = Q^T b \rightarrow R \cdot x = Q^T b \quad (1.5.1)$$

Burada bərabərlikdə R üst üçbucaqvari formada olduğundan x vektoru aşağıdan yuxarıya doğru iterativ qaydada əvəzləmə üsulu ilə tapılır.

LU dekompozisiyası matrisin elə $A = LU$ parçalanmasına deyilir ki, L və U matrisləri uyğun olaraq üst və alt üçbucaqvari formada olsun. Xətti tənliklər sisteminin LU dekompozisiyası vasitəsilə həlli aşağıdakı ardıcılıqla baş verir [81, s.1-2]:

$$A \cdot x = b \rightarrow LU \cdot x = b \rightarrow L(U \cdot x) = b \quad (1.5.2)$$

(1.5.2) formulunda $Ux = y$ əvəzləməsi etdikdən sonra $Ly = b$ sistemindən yuxarıdan aşağıya iterativ əvəzləmə vasitəsilə y tapılır və daha sonra $U \cdot x = y$ tənliklər sistemindən aşağıdan yuxarıya iterativ əvəzləmə üsulu ilə x hesablanır.

Çoleski dekompozisiyası isə matrisin $A = LL^T$ hasilinə parçalanmasıdır [81, s.1-2]. Burada da, L üst üçbucaqvari formaya malik matris, L^T isə onun transponirə olunmuş formasıdır. Çoleski dekompozisiyası LU dekompozisiyasından daha effektiv olsa da, yalnız simmetrik və müsbət elementli əmsal matrisinə tətbiq edilə bilər.

Məxsusi vektor və məxsusi ədədlərin tətbiqi ilə istifadə olunan dekompozisiya alqoritmlərinə isə spektral dekompozisiya (məxsusi dekompozisiya) və SVD dekompozisiya üsullarını misal gətirmək olar. Bu cür üsulların mənfi cəhəti böyük ölçülü matrislərin məxsusi ədəd və vektorlarının hesablanması zamanı “bəd xassəli” matrislərin yaranmasıdır ki, bu da hesablama maşınlarında reallaşdırılmasını çətinləşdirir. Digər iterativ metodlardan Seelen üsulunu [85], Hellstern tərəfindən [73] məqaləsində tətbiq olunan Qaus-Seidel alqoritmini misal gətirmək olar.

Göstərilən alqoritmlərin mürəkkəbliyi $O(n^3)$ ilə ölçülür və əmsal matrisinin xüsusiyyətlərindən asılı olaraq biri digərdindən daha effektiv ola bilər. Xətti tənliklərin hesablanması üçün alqoritmlər Matlab, R, Python SciPy, Apache Commons Math kimi məşhur kitabxanalarda reallaşdırılıb və ədədi ekperimentlərin aparılmasında geniş tətbiq olunur. Dissertasiyada ədədi eksperimentlər zamanı xətti tənlikləri həll etmək üçün, əsasən, **Python SciPy** kitabxanasından istifadə olunmuşdur.

Bəhs edilən dekompozisiya alqoritmlərinin qısa təsnifatı Cədvəl 1.5.1-də təqdim olunmuşdur. Xətti tənliklər sisteminin həlli üsulları və dekompozisiya alqoritmləri haqqında daha geniş məlumatı [99] məqaləsindən əldə etmək olar.

Cədvəl 1.5.1 Matris Dekompozisiya üsullarının təsnifatı

Dekompozisiya	Əmsal matrisi	Dəqiqlik
LU	kvadrat matris	dəqiq həll
Çoleski	müsbət simmetrik	dəqiq həll
QR	ixtiyari	minimal kvadratlar cəmi
Məxsusi və ya spectral dekompozisiya	kvadrat	dəqiq həll
SVD (singular value decomposition)	ixtiyari	minimal kvadratlar cəmi

İstənilən Markov zəncirinin stasionar paylanmasını hesablamaq üçün balans tənliklərini yuxarıda danışılan alqoritmlər vasitəsilə həll etmək olar və bu zaman keçid matrisi üzərinə heç bir əlavə şərt tətbiq edilmir. Qeyd olunduğu kimi, bu üsullar eksponensial mürəkkəbliyə malikdir və böyük ölçülü matrislər üçün praktik effektiv olmur. Buna görə də, keçid matrisi üzərinə əlavə şərtlər tətbiq etməklə mürəkkəbliyi daha az və effektiv olan dəqiq alqoritmlərdən istifadə etmək olar.

Keçid matrisi üzərinə əlavə şərtlər tətbiq etməklə stasionar paylanmanın hesablanması üsulları. Stasionar paylanmanın hesablanması üçün geniş tətbiq olunan alqoritmlərdən biri **Nyuts** alqoritmidir [75, 76]. Matris analitik metodun tətbiqi üçün tələb olunur ki, KZMZ-in keçid matrisi təkrarlanan blok tridiaqonal formaya malik olsun:

$$Q = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{10} & A_1 & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (1.5.3)$$

Burada B_{00} , B_{01} , B_{10} , A_0 , A_1 , A_2 matrislərdir. Bu matrislərdən və balans tənliklərindən stasionar paylanmanı hesablamaq üçün aşağıdakı tənliklər sistemini almış oluruq:

$$(1.5.4)$$

$$\begin{cases} \pi_0 B_{00} + \pi_1 B_{10} = 0 \\ \pi_0 B_{01} + \pi_1 A_1 + \pi_2 A_0 = 0 \\ \pi_1 A_2 + \pi_2 A_1 + \pi_3 A_0 = 0 \\ \dots \\ \pi_{i-1} A_2 + \pi_i A_1 + \pi_{i+1} A_0 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

(1.5.4) tənliklər sistemi üzərində müəyyən çevirmələr apardıqdan sonra növbəti rekursiv münasibəti almış oluruq: $\pi_i = \pi_1 R^{i-1}$. Burada R Nyuts matrisi adlanır və bu matrisdən istifadə etməklə tənliklər sistemini aşağıdakı formada sadələşdirmək olar:

$$(\pi_0 \ \pi_1) \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & A_1 + RA_0 \end{pmatrix} = (0 \ 0) \quad (1.5.5)$$

Sonuncu tənliklər sistemindən π_0 və π_1 tapıldıqdan sonra (1.5.4) vasitəsilə π_i rekursiv qaydada hesablanır. Tələb olunan R Nyuts matrisinin hesablanması alqoritmi isə [81] məqaləsində izah edilir.

Nyuts alqoritminin daha mürəkkəb formaları da mövcuddur və $M/G/1$ Markov zəncirlərinin analizində istifadə edilir.

KXES modellərinin analizi zamanı stasionar ehtimalların hesablanması üçün Matris həndəsi üsulunun tətbiq olunduğu məqalələrə [8, 11, 18, 48, 54, 55, 92] və s. misal gətirmək olar.

Müəyyən strukturlu keçid matrisi olan Markov zəncirlərinə tətbiq olunan digər alqoritm **spektral genişlənmə (SG)** alqoritmidir [22, 72]. SG alqoritmii dissertasiya işində istifadə olunduğundan [2] bu metod ilə ətraflı tanış olaq.

Spektral genişlənmə alqoritmii. SG alqoritmii ikiölçülü Markov modellərinə tətbiq edilir. Fərz edək ki, baxılan Markov modelinin elementlər fəzası aşağıdakı kimidir:

$$S = \{(i, j): i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots\} \quad (1.5.6)$$

Modelin birinci komponenti i sonlu, ikinci komponenti j isə sonsuzdur. Uyğunluq üçün fərz edək ki, i üfüqi, j isə şaquli istiqamətdə dəyişir, yəni sistemin vəziyyətlər fəzası birtərəfli sonsuz zolaqlı müstəvi ilə təsvir olunur.

Sistemin keçid matrisini üç alt matrisə parçalayaq:

1. A_j matrisi bütün üfüqi keçidləri təşkil edir: $(i, j) \rightarrow (k, j)$, $0 \leq i, k \leq N, i \neq k, j = 0, 1, \dots$
2. B_j matrisi bütün vahid addımlı şaquli yuxarı keçidlərdən ibarətdir: $(i, j) \rightarrow (k, j + 1)$, $0 \leq i, k \leq N, j = 0, 1, \dots$
3. C_j matrisi bütün vahid addımlı şaquli aşağı keçidləri təşkil edir: $(i, j) \rightarrow (k, j - 1)$, $0 \leq i, k \leq N, j = 1, 2, \dots$

Bu üç matris $(N + 1) * (N + 1)$ ölçülü kvadrat keçid matrisləri olub, uyğun olaraq, $A_j(i, k)$ elementi (i, j) vəziyyətindən (k, j) vəziyyətinə, $B_j(i, k)$ elementi (i, j) vəziyyətindən $(k, j + 1)$ vəziyyətinə, $C_j(i, k)$ elementi (i, j) vəziyyətindən $(k, j - 1)$ vəziyyətinə keçid intensivliyini ifadə edir və qəbul edilir ki, $C_0 = 0$.

Fərz edək ki, elə bir müsbət tam $M, M \geq 1$ ədədi mövcuddur ki, $j \geq M$ olduqda A_j və C_j matrisləri, $j \geq M - 1$ olduqda isə B_j matrisi j indeksindən asılılığını itirir, yəni, aşağıdakı bərabərliklər ödəyir:

$$A_j = A, j \geq M; B_j = B, j \geq M - 1; C_j = C, j \geq M; \quad (1.5.7)$$

M həddi **spektral hədd** adlanır. Spektral hədd SG alqoritmini tətbiq etmək üçün keçid matrisi üzərinə qoyulan yeganə şərtidir. Alqoritmin mürəkkəbliyi də spektral həddən asılıdır, belə ki, M artdıqca alqoritmin mürəkkəbliyi də artır.

Növbəti addımda $(N + 1) * (N + 1)$ ölçülü diaqonal D_j^A, D_j^B, D_j^C matrislərini təyin edək:

$$D_j^A(i, i) = \sum_{k=0}^N A_j(i, k); D_j^B(i, i) = \sum_{k=0}^N B_j(i, k); D_j^C(i, i) = \sum_{k=0}^N C_j(i, k) \quad (1.5.8)$$

D_j^A, D_j^B, D_j^C matrislərinin i -ci diaqonal elementi, uyğun olaraq, A_j, B_j, C_j matrislərinin i -ci sətir elementlərinin cəminə bərabərdir. Analoji qaydada D^A, D^B, D^C matrisləri üçün də düsturlar almış oluruq:

$$D^A(i, i) = \sum_{k=0}^N A(i, k); D^B(i, i) = \sum_{k=0}^N B(i, k); D^C(i, i) = \sum_{k=0}^N C(i, k) \quad (1.5.9)$$

Yuxarıda verilənlərdən istifadə etməklə balans tənliklərini aşağıdakı formada yazmaq olar:

$$\begin{cases} v_j [D_j^A + D_j^B + D_j^C] = v_{j-1} B_{j-1} + v_j A_j + v_{j+1} C_{j+1}; j \leq M - 1; v_{-1} = 0 \\ v_j [D^A + D^B + D^C] = v_{j-1} B + v_j A + v_{j+1} C; j \geq M \end{cases} \quad (1.5.10)$$

Burada $v_j = (p_{0j}, p_{1j}, \dots, p_{Nj})$ və v_j vektoru ikinci komponenti j olan bütün vəziyyətlərin stasionar ehtimallarından ibarətdir, e isə $N + 1$ ölçülü vahid sütun vektordur.

(1.5.10) sisteminə əlavə olaraq tam ehtimal düsturuna əsasən normallaşdırma şərti də qoşulur:

$$\sum_{j=0}^{\infty} v_j e = 1 \quad (1.5.11)$$

Növbəti addımda (1.5.10) tənliklər sistemindəki ikinci tənliyi aşağıdakı formada çevirək:

$$v_j Q_0 + v_{j+1} Q_1 + v_{j+2} Q_2 = 0; j = M - 1, M, \dots \quad (1.5.12)$$

Burada $Q_0 = B$, $Q_1 = A - (D^A + D^B + D^C)$ və $Q_2 = C$. Sonuncunun ikinci dərəcəli xarakteristik çoxhədlisi $Q(\lambda)$ aşağıdakı düsturla müəyyən olunur:

$$Q(\lambda) = Q_0 + Q_1 \lambda + Q_2 \lambda^2 \quad (1.5.13)$$

Fərz edək ki, (λ_k, ψ_k) $Q(\lambda)$ -ya uyğun olan və $|\lambda_k| < 1$ şərtini ödəyən c -sayda məxsusi ədəd və məxsusi vektor cütlüklər çoxluğudur. [22, s.24] məqaləsində sübut olunmuşdur ki, $c = N + 1$ olarsa, sistem yığılandır və onun yeganə stasionar paylanması mövcuddur, əks halda, sistem dağılındır. (λ_k, ψ_k) cütlükləri məxsusi ədəd və məxsusi vektorların hesablanması alqoritmləri vasitəsilə tapılır (məsələn, QR alqoritmi) [22, s.25]. Əgər $|\lambda_k| < 1$ şərtini ödəyən cütlüklərin sayı $c = N + 1$ olarsa, bu zaman stasionar ehtimallar aşağıdakı düsturlarla hesablanır:

$$(1.5.14)$$

$$v_n = \sum_{k=0}^N a_k \psi_k \lambda_k^{n-M+1}, \quad n = M - 1, M, \dots$$

və ya ekvivalent olaraq:

$$p_{i,n} = \sum_{k=0}^N a_k \psi_k(i) \lambda_k^{n-M+1}, \quad n = M - 1, M, \dots \quad (1.5.15)$$

(1.5.15) düsturunda olan a_k əmsallarını hesablamq üçün (1.5.10) düsturundan, (1.5.11) normallaşdırma şərtindən istifadə etməklə, v_0 və v_1 vektoralarını (1.5.14) formuluna əsasən a_k ifadələri ilə əvəzləyib aşağıdakı $N + 1$ ölçülü tənliklər sistemini a_k -ya nəzərən həll etmək lazımdır:

$$\begin{cases} v_0 Q_{1,0} + v_1 Q_{2,1} = 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} v_n e = 0 \end{cases} \quad (1.5.16)$$

Burada $Q_{0,n} = B_n$, $Q_{1,n} = A_n - (D_n^A + D_n^B + D_n^C)$ və $Q_{2,n} = C_n$.

SG alqoritminin mürəkkəbliyi yalnız M spektral həddindən asılıdır. [22, s.68-70, 72] işlərində SG metodunun digər alternativ alqoritmlərdən daha effektiv olduğu isbat edilir. Buna görə də, dissertasiyada bəzi modellərin tədqiqi zamanı bu alqoritm istifadə olunur. Əlavə olaraq, alqoritm sonlu və çox-addımlı Markov zəncirləri üçün ümumiləşməsi də mövcuddur. Spektral genişlənmə alqoritm mənfi cəhəti isə məxsusi ədəd və vektorların hesablanması zaman “bəd xassəli” matrislər yarandığından praktiki tətbiqinin çətin olmasıdır.

1.5.2. Təqribi üsullar

Markov zəncirlərinin vəziyyət vektorunun elementlərinin sayı artıqca və keçid matrisi sonsuz və ya iri ölçülü olduqda stasionar paylanmanın dəqiq metodlarla hesablanması praktiki qeyri-mümkün və ya çətin olur. Bu zaman stasionar

paylanmanın hesablanması üçün təqribi alqoritmlərdən istifadə olunur. Dissertasiyada istifadə olunan və son zamanlar geniş tətbiq olunan **fəza iriləşməsi** alqoritmi haqqında məlumatı [68, 80] məqalələrindən əldə etmək olar.

Fəza iriləşdirilməsi alqoritminin əsas mahiyyəti “parçala və fəth et” prinsipini tətbiq etməklə verilən iriölçülü modeli məlum birölçülü modellərə parçalamaq və stasionar ehtimalları məlum birölçülü modellərin düsturları vasitəsilə analitik qaydada hesablamaqdan ibarətdir. Bu zaman ilkin problem mürəkkəbliyi daha az olan sonlu sayda daha sadə problemlərə parçalanmış olur.

İkiölçülü KZMZ üçün fəza iriləşdirilməsi alqoritminin tətbiqi addımlarına baxaq. Fərz edək ki, sistemin vəziyyətlər fəzası aşağıdakı qaydada müəyyən olunur:

$$E = \{(m, n): m = 0, 1, \dots, M; n = 0, 1, \dots, N\} \quad (1.5.17)$$

Burada M və N natural ədəd və ya müsbət sonsuzluqdur.

İlkin vəziyyətlər fəzasını aşağıdakı kimi alt fəzalara parçalayaraq:

$$E = \bigcup_{m=0}^M E_m, \quad E_m \cap E_{m'} = \emptyset, \quad m \neq m' \text{ olduqda} \quad (1.5.18)$$

Burada $E_m = \{(m, n) \in E: n = 0, 1, \dots, N\}$.

(1.5.18) parçalanmasında E_m vəziyyətlər sinfi birinci komponenti m olan bütün vəziyyətləri təşkil edir. Növbəti addımda isə iriləşdirmə funksiyası təyin edilir:

$$U(m, n) = \langle m \rangle \quad (1.5.19)$$

Burada $\langle m \rangle E_m, m = 0, 1, \dots, M$ sinfinin elementlərini birləşdirilən iriləşmiş vəziyyət olur.

Nəticədə, yeni iriləşmiş vəziyyətlər fəzası alınır:

$$\Omega = \{\langle m \rangle: m = 0, 1, \dots, M\} \quad (1.5.20)$$

İkinci komponentə nəzərən iriləşmiş fəzalar arasındakı keçidlərin intensivliyi çox kiçik olduqda ilkin modelin stasionar ehtimalını aşağıdakı təqribi düsturla hesablamaq olur [80, s.167-173]:

$$p(m, n) \approx \rho_m(n)\pi(\langle m \rangle) \quad (1.5.21)$$

Burada $\rho_m(n)$ vəziyyətlər fəzası $E_m, m = 0, 1, \dots, M$ olan (1.5.18) parçalanması daxilində (m, n) vəziyyətinin stasionar ehtimalı, $\pi(\langle m \rangle)$ isə iriləşmiş $\langle m \rangle \in \Omega$ vəziyyətinin stasionar ehtimalına bərabərdir.

Beləliklə, ilkin ikiölçülü problem iki birölçülü modellərin stasionar ehtimalların hesablanması problemlərinə parçalanır. Əgər parçalanma nəticəsində alınmış yeni modellərin stasionar ehtimallarının hesablanması üçün analitik düsturlar mövcuddursa, o zaman (1.5.21) bərabərliyinə əsasən ilkin modelin stasionar ehtimalı üçün də analitik düstur almış oluruq. İlkin modelin uyğun qaydada parçalanmasına aid nümunələri Məlikov və onun tələblərinin məqalələrindən əldə etmək olar [4, 5, 6, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 80, 87]. Qeyd olunan məqalələrdə fəza iriləşməsi alqoritminin effektivliyindən əlavə, yüksək dəqiqliyi də ədədi eksperimentlər vasitəsilə isbat edilmişdir.

Fəza iriləşdirilməsi alqoritminin effektiv tətbiqi və yüksək dəqiqliyi üçün ikinci komponentə nəzərən E_m vəziyyətləri arasındakı keçid intensivliklərinin kiçik olması əsas şərtidir.

Üçölçülü və ya çoxölçülü Markov zəncirlərinin stasionar ehtimallarının hesablanması üçün **iyerarxik fəza iriləşdirilməsi** alqoritmi tətbiq olunur. Çoxölçülü halda da, analogi olaraq, ilkin model ardıcıl iyerarxik qaydada alt fəzalara parçalanır. Məsələn, üçölçülü halda ilkin vəziyyətlər fəzası əvvəlcə birölçülü və ikiölçülü olmaqla iki alt fəzalara parçalanır. Daha sonra isə alınmış ikiölçülü alt fəzaya fəza iriləşdirilməsi alqoritmi təkrar tətbiq edilir. Üçölçülü modellər üçün fəza iriləşdirilməsi alqoritmi [60, s.62-68, 61, s.106-109, 66, s.778-780, 67, s.58-63, 68] məqalələrində tətbiq edilmiş və metodun yüksək dəqiqliyi ədədi eksperimentlər vasitəsilə nümayiş olunmuşdur.

Fəza iriləşdirilməsi alqoritminin effektivliyi və dəqiqliyindən əlavə, sistemin QoS göstəriciləri üçün analitik düsturların alınmasında və optimallaşdırma məsələlərinin həllində də uğurla tətbiq olunur.

Fəza iriləşdirilməsi alqoritminin çatışmayan cəhəti isə onun tətbiqi nəticəsində təqribi düsturların alınması və xətasının qiymətləndirilməsi üçün analitik üsulun hələlilik mövcud olmamasıdır. Bununla belə, iriləşmiş fəzalar arasındakı daxili keçid intensivlikləri kiçik olduqda empirik qaydada nəticələrin yüksək dəqiqliyi isbat olunmuşdur.

Beləliklə, stasionar ehtimalların hesablanması üçün dəqiq və təqribi üsulları xülasə olunduqdan sonra paraqrafın növbəti bəndində simulyasiya alqoritmləri haqqında məlumat veriləcək.

1.5.3. Simulyasiya üsulları

Keçid matrisi dəqiq və təqribi üsullar üçün əlverişli olmadıqda və ya sonsuz ölçülü keçid matrisləri üçün stasionar ehtimalların hesablanmasında simulyasiya alqoritmlərindən istifadə edilməsi daha məqsədəuyğundur.

KZMZ modellərinin simulyasiyası üçün **stoxastik simulyasiya alqoritmlərindən** istifadə edilir. Stoxastik simulyasiya üsullarının icmalını [17] məqaləsindən əldə etmək olar.

Gillespie alqoritmi KZMZ modellərinin simulyasiyasında geniş tətbiq edilən metodlardan olub 1976-cı ildə Gillespie tərəfindən kimyəvi reaksiyalarda molekulların hərəkətini simulyasiya etmək üçün yaradılmışdır [32, s.403-405]. Sonradan bu metod digər bioloji proseslərdə də öz tətbiqini tapmış və standart simulyasiya üsulu kimi istifadə olunmağa başlamışdır [9, 15, 57, 78, 102]. Gillespie alqoritmi iki formada reallaşdırılır: Direct method və First reaction method. Direct method daha effektiv və praktiki reallaşdırılması sadə olduğundan geniş tətbiq olunur və dissertasiyada da ədədi eksperimentlər zamanı məhz bu alqoritmdən istifadə olunur.

Gillespie's direct alqoritmi aşağıdakı addımlardan ibarətdir:

1. Sistemin T simulyası müddəti müəyyən edilir, cari keçmiş vaxt $t = 0$ qəbul edilir;
2. Sistemin ilkin vəziyyəti x vəziyyətlər fəzasından təsadüfi şəkildə seçilir və ya 0 qəbul edilir;

3. Cari x vəziyyətindən bütün mümkün keçid intensivliklərinin cəmi hesablanır: $Q = \sum_{x_i \in E} q(x, x_i), i = 0, \dots, l$;
4. Parametri Q olan eksponensial təsadüfi kəmiyyətin simulyasiyasından növbəti Δt müddəti tapılır;
5. Standart bircins paylanmış təsadüfi kəmiyyət vasitəsilə təsadüfi r ədədi seçilir;
6. Sistemin növbəti vəziyyəti x_n isə bu cür seçilir: əgər $0 < r < q(x, x_0)/Q$ olarsa, $x = x_0$; əgər $q(x, x_0)/Q < r < (q(x, x_0) + q(x, x_1))/Q$ olarsa, $x = x_1$; əgər $\sum_{i=0}^{n-1} q(x, x_i) / Q < r < \sum_{i=0}^n q(x, x_i) / Q$ olarsa, $x = x_n$;
7. Cari keçmiş vaxt yenilənir: $t = t + \Delta t$;
8. 3-7 addımları $t \leq T$ şərti ödənənə qədər təkrarlanır.

Alqoritmdə T simulyasiya müddəti sistemin parametrlərinə uyğun olaraq eksperimental şəkildə seçilir. Üçüncü addımdakı Q kəmiyyəti Markov modelinin keçid matrisindən istifadə etməklə hesablanır. Hər bir vəziyyətin stasionar ehtimalı isə sistemin uyğun vəziyyətdə keçirdiyi zamanın (sojourn time) ümumi simulyasiya müddətinə nisbəti kimi hesablanabilir.

Gillespie direct alqoritmin reallaşdırılması zamanı hesablama mürəkkəbliyi və yaddaş resursuna tələbat yüksək olduğundan vəziyyətlərin sayı çox olan halda bu üsul effektiv olmaya bilər. Bunun üçün eyni alim tərəfindən təqribi olan **tau-leaping** üsulu təqdim edilmişdir [33]. Bu üsul hesablama vaxtını kifayət qədər azaltmaqla və çox kiçik dəqiqlik itkisi ilə simulyasiya etməyə imkan yaradır. Bu metodun əsas mahiyyəti ondan ibarətdir ki, direct üsulda olduğu kimi hər keçidi izləmək əvəzinə, kiçik zaman intervalındakı keçidlərin sayı aproksimasiya edilir və hər növbəti addımda bir intervaldan digərinə “tullanma” baş verir. Bu üsulun üstünlüyü ondan ibarətdir ki, verilmiş intervalda bir neçə keçidi eyni zamanda simulyasiya etmək mümkündür. Bu da öz növbəsində, hesablamanı sürətləndirir. Tau-leaping üsulunun müxtəlif modifikasiyaları mövcuddur və bu üsul bir çox mürəkkəb bioloji sistemlərin simulyasiyasında istifadə olunur [17, s.1-5].

Böyük ölçülü sistemlərin simulyasiyası üçün digər effektiv üsul isə **Gibson-Bruck next reaction** alqoritmidir [31]. Bu alqoritmin Gillespie direct üsuluna nisbətən

daha sürətli işləməsi ədədi eksperimentlərlə isbat olunmuşdur. Gibson-Bruck next reaction alqoritminin reallaşdırılmasında asılılıq qrafları və prioritetli növbələrdən istifadə olunur.

Sadalanın alqoritmlər yüksək effektivliyə malik olsa da, onlar çox böyük ölçülü sistemlərin öhdəsindən tam gələməyə bilər. Bu halda **hibrid** alqoritmlər tətbiq oluna bilər. Hibrid alqoritmlər eyni simulyasiya platformasında bir neçə üsulun paralel tətbiqini nəzərdə tutur. Hibrid alqoritmlərin əsas mahiyyəti fərqli simulyasiya metodlarını eyni platformada elə qaydada tətbiq etməkdir ki, bir metodun üstünlükləri digərinin çatışmazlıqlarını kompensasiya edə bilsin. Hibrid alqoritmə nümunə olaraq, Cellware program təminatında yaradılmış StochODE üsulunu misal gətirmək olar [26].

1.6. Ədədi eksperimentlərin növləri

Beləliklə, Markov zəncirlərinin stasionar ehtimallarının hesablanması üçün dəqiq, təqribi və simulyasiya alqoritmləri ilə tanış olduq. Bu paragrafda stasionar ehtimallardan istifadə etməklə sistemin keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması, ədədi eksperimentlər, həmçinin optimallaşdırma məsələləri haqqında məlumat veriləcək.

Stasionar ehtimallar tapıldıqdan sonra sistemin stasionar halda davranışını analiz etmək və keyfiyyət göstəricilərini hesablamaq mümkün olur. Sistemin QoS göstəricilərini müəyyən etməklə onun fəaliyyətini optimallaşdırmaq və keyfiyyətini artırmaq mümkündür. Cari paragrafda keyfiyyət göstəricilərinin növləri və hesablama qaydaları, optimallaşdırma məsələləri və əlavə olaraq, tətbiq edilən təqribi alqoritmlərin dəqiqliyinin ölçülməsi haqqında məlumat veriləcək.

1.6.1. Keyfiyyət göstəricilərinin analizi

Dissertasiya işində tədqiq olunan QoS-ları şərti olaraq iki qrupa bölmək olar: “xidmət hissəsinin” və “ehtiyatlanma hissəsinin” QoS-ları. “Xidmət hissəsinin” QoS-ları dedikdə sırf sorğulara xidmət prosesləri ilə əlaqəli keyfiyyət göstəriciləri nəzərdə tutulur. Məsələn, əgər sonlu növbəsi olan sistemlərə baxılırsa, burada əsas QoS göstəriciləri olaraq sistemdəki sorğuların orta sayını, növbədə orta gözləmə müddətini, sorğuların itməsi ehtimalını və s. göstərmək olar. “Ehtiyatlanma hissəsinin” QoS

göstəricilərinə isə anbardakı ehtiyatların orta səviyyəsi, EA tələblərinin intensivliyi, anbardakı ehtiyatların orta xarabolma intensivliyi və s. aiddir.

Yuxarıda göstərilən QoS-lar stasionar ehtimallar vasitəsi ilə hesablanır. Bunun üçün Markov modellərinin aşağıdakı özəlliyindən istifadə olunur: hər bir vəziyyətin stasionar ehtimalı uzun zaman intervalında sistemin bu vəziyyətdə qalmasının göstəricisidir. Başqa sözlə, əgər T uzunluqlu zaman intervalında sistem i vəziyyətində T_i qədər olursa, bu zaman $P(i)$ stasionar ehtimalı aşağıdakı qaydada hesablanır:

$$P(i) = \frac{T_i}{T} \quad (1.6.1)$$

Markov modellərinin bu xassəsindən istifadə edərək lazım olan QoS-lar stasionar ehtimallar vasitəsi ilə müxtəlif marginal paylanmaları tapmaqla hesablanır. Növbəti fəsildə konkret modellərdə bu yanaşma ətraflı şəkildə izah olunmuşdur.

QoS-ların analizi zamanı onların sistemin müxtəlif parametrlərdən asılılığına və müqayisəli analizinə baxılır. Məsələn, [4, 7, 60, 61, 63, 87] məqalələrində QoS göstəricilərin EA həddindən, [66, s.777-779] məqaləsində isə EA həddindən və EA qaydasından asılılığı qrafik şəkildə nümayiş olunmuşdur. QoS-ların qiymətləndirilməsi və onların müxtəlif parametrlərdən asılığının analizi sistemin optimallaşdırılmasında mühüm rol oynayır.

Sistemin stasionar ehtimalları və keyfiyyət göstəriciləri hesablandıqdan sonra onun optimallaşdırılması məsələlərinə baxmaq olar.

1.6.2. Optimallaşdırma məsələləri

Bu məsələlər içərisində ən geniş yayılmışı sistemin məqsəd funksiyasını (Total Cost, TC) optimallaşdırmaqdır. Sistemin stasionar ehtimallarının və keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması, stasionar halda davranışının öyrənilməsində əsas məsələ sistemin məqsəd funksiyasını müəyyən etmək və minimallaşdırmaqdır. Bu problem KXES analizində optimallaşdırma məsələsi kimi tanınır.

Optimallaşdırma məsələsinin qoyuluşu və həlli üç əsas mərhələdən ibarətdir:

1. Məqsəd funksiyasının qurulması – bu mərhələdə sistemin QoS göstəricilərindən, parametrlərindən və əmsallarından istifadə etməklə

məqsəd funksiyası üçün formul müəyyən edilir. Əmsallar isə praktikada öncədən məlum olur və ya empirik qaydada tapılır. Məsələn: $TC = c_n S_{av} + c_r RR + c_p \Gamma_{av} + c_w L_{av} + c_s P_b$.

2. Məqsəd funksiyasının asılı olduğu idarə oluna bilən optimallaşdırma parametrləri müəyyən edilir. Məsələn, EX-KXES sistemlərində idarə edilən optimallaşdırma parametri kimi EA tələbinin yerləşdirilmə həddi seçilə bilər [63, s.92-95]: $s^* = \operatorname{argmin}\{TC(s): 0 \leq s < S/2\}$. İdarə edilən parametrlərinin sayının birdən çox olması da mümkündür. Məsələn, [2, s.165-168, 60, s.65-70, 61, s.107-110] məqalələrində optimallaşdırma məsələsi EA həddi və təchizatçı seçiminə nəzərən həll edilmişdir.
3. Sonuncu addımda isə seçilmiş dəyişənlərin məqsəd funksiyasını minimallaşdıran qiymətləri tapılır. Seçilmiş optimallaşdırma parametrlərinin qiymətlər oblastı sonlu olduqda optimal qiymət tam seçmə üsulu (brute force) ilə hesablanıla bilər.

Dissertasiya işində həm bir, həm də iki parametrlə məqsəd funksiyaları olan optimallaşdırma məsələləri həll edilmişdir.

1.6.3. Təqribi alqoritmin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi

Dissertasiya işində bəzi modellərin stasionar ehtimallarının hesablanması fəza iriləşdirilməsi alqoritmindən və ya digər təqribi üsullardan istifadə olunduğundan nəticələrin dəqiqliyinin isbatı ədədi eksperimentlərdə nümayiş etdirilir. Fəza iriləşdirilməsi alqoritminin nəticələri dəqiq alqoritmlərin uyğun nəticələri ilə müxtəlif normalardan istifadə etməklə müqayisə olunur. Müqayisənin nəticələri cədvəl şəklində nümayiş etdirilir. Müqayisə zamanı növbəti normalardan istifadə edilir:

- Maksimum mütləq fərq - iki vektorun uyğun elementlərinin maksimum mütləq qiymət fərqinə bərabərdir: $\|N\|_1 = \max abs = \max_i |A_i - B_i|$
- Jaccard oxşarlığı - $[0,1]$ aralığında dəyişib vektorların oxşarlığını qiymətləndirmək üçün istifadə olunur [105]. Burada 0 tam fərqlilik, 1 isə tam oxşarlığı ifadə edir: $\|N\|_2 = J(A, B) = \frac{\sum_i \min(A_i, B_i)}{\sum_i \max(A_i, B_i)}$

- Cosinus oxşarlığı (cosine similarity) – Cosinus oxşarlığı iki vektor arasındakı bucağı ölçməklə $[-1,1]$ aralığında qiymətlər alır [90, s.3]. -1 qiymət vektorların tam əks, 1 qiyməti tam oxşar, 0 isə vektorların perpendikulyar və ya əlaqəsiz olduğunu bildirir. İki A və B vektorlarının cosinus oxşarlığı $\|N\|_3 = \cos(\theta) = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|} = \frac{\sum_i A_i B_i}{\sqrt{\sum_i A_i^2} \sqrt{\sum_i B_i^2}}$ düsturu ilə hesablanır və burada A_i və B_i uyğun olaraq A və B vektorlarının elementləridir.
- Evklid məsafəsi – iki vektor arasındakı məsafəni ölçməklə onların yaxınlığını qiymətləndirmək üçündür: $\|N\|_4 = (\sum_i (A_i - B_i)^2)^{1/2}$.

Sadalan normaların hesablanması üçün Python SciPy, Matlab, Apache Commons Math və digər riyazi proqram təminatlarında və kitabxanalarında uyğun modullar mövcuddur. Dissertasiya işində normaların hesablanması üçün Python SciPy və Apache Commons Math kitabxanalarından istifadə olunur.

1.7. Birinci fəslin nəticələri

Beləliklə, fəslin əvvəlində KXES modellərinin təsnifatı və mövzu üzrə mövcud elmi ədəbiyyatın vəziyyəti haqqında məlumat verildi. EX-KXES modellərinin son illərdə alimlərin diqqətini cəlb etməsi məlum oldu.

KXES-lərin KZMZ vasitəsilə modelləşdirilməsi və sistemin vəziyyətinin ikiölçülü halda anbarda ehtiyatların və növbədəki sorğuların, üçölçülü halda isə əlavə olaraq, əks əlaqə buferindəki (və ya orbitdəki) sorğuların sayı ilə müəyyən olunması göstərildi.

EA qaydaları təsnif edildi. Optimal EA qaydasının seçiminin sistemin xüsusiyyətlərindən və parametrlərindən asılı olması qənaətinə gəlini. Sabit ölçülü EA qaydaları arasında (s, S) qaydasının daha geniş tətbiq olunması qənaətinə gəlini.

Stasionar ehtimalların hesablanması üçün dəqiq üsulların eksponensial mürəkkəbliyə malik olması, yalnız kiçik və ya ortaölçülü sistemlər üçün effektivliyi məlum oldu. Keçid matrisi üzərinə əlavə şərtlə qoymaqla mürəkkəbliyi nisbətən az olan dəqiq üsullar haqqında məlumat verildi və SG metodunun daha səmərəli olması

göstərildi. Təqribi üsullardan Fəza iriləşdirilməsi alqoritminin çoxölçülü sistemlər üçün praktiki effektiv olması və ədədi eksperimentlər zamanı dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi məsələləri izah edildi. Dəqiq və təqribi üsullar əlverişli olmadıqda simulyasiya metodlarından istifadə olunması, Gillespie's direct alqoritminin sadəliyi və praktiki effektivliyi səbəbindən geniş tətbiq edilməsi haqqında məlumat verildi.

Məsələnin qoyuluşunun verilən KXES modellərinin stasionar ehtimallarının tapılmasından, QoS göstəricilərinin müəyyən olunması və hesablanmasından, həmçinin ədədi eksperimentlərin nəticələrinin təhlili və optimallaşdırma məsələlərinin həll edilməsindən ibarət olduğu göstərildi. Optimallaşdırma məsələsinin bir və ya bir neçə idarə edilən sistem parametrlərin müəyyən edilməsi, məqsəd funksiyasının qurulması və minimallaşdırması addımlarından ibarət olması qeyd edildi.

II FƏSİL. İKİÖLÇÜLÜ EX-KXES MODELLƏRİ

Birinci fəsildə mövcud ədəbiyyatın analizindən sonra EX-KXES modellərinin kifayət qədər araşdırılmadığı qənaətinə gəldik. Buna görə də, dissertasiyada yalnız ehtiyatları xarab olan bilən modellərə baxılacaq.

Cari fəslin tədqiqat mövzusu ikiölçülü EX-KXES modellərinin analizi olacaq. Müxtəlif tipli sorğuları olan, vəziyyətlər fəzası sonlu və sonsuz modellərə baxılacaq və fərqli EA qaydaları tətbiq ediləcək.

Baxılan hər bir model üçün keçid matrisi qurulacaq, stasionar ehtimalların və sistemin QoS göstəricilərinin hesablanması üçün dəqiq və təqribi alqoritmlər yaradılacaq. Fəslin sonunda isə ədədi eksperimentlərin nəticələri nümayiş etdiriləcək, təqribi üsulların dəqiqliyi qiymətləndiriləcək və keyfiyyət göstəricilərinin sistemin parametrlərindən asılılığı təhlil olunacaq. Bundan başqa, bəzi modellər üçün optimallaşdırma məsələləri də həll ediləcək.

2.1. Müxtəlif tipli sorğulu modellər

Klassik KXES modellərində fərz edilir ki, xidmət başa çatdıqdan sonra anbarda ehtiyatların səviyyəsi azalır. Bununla belə, yaxın zamanda çap olunan [50, 51] məqalələrində bu fərziyyənin ödənmədiyini modellər təqdim edilmişdir. Qeyd edilən işlərdə qəbul edilir ki, anbar ehtiyatının səviyyəsi xidmət başa çatdıqdan sonra bəzi hallarda dəyişməz qalır. Buna nümunə kimi mağazada hər hansı məhsulun satışı sistemini misal gətirmək olar. Satıcı tərəfindən xidmət göstərilən müştəri məhsulu aldığı halda anbardakı ehtiyatların səviyyəsi azalır, əks halda (məsələn, müştəri məhsulu bəyənməzsə və ya xidmətdən narazı qalarsa) isə dəyişməz qalır. Digər nümunə hər hansı şirkətdə açıq vakansiyalara namizədlərin qəbuludur. Başqa sözlə, namizəd işə qəbul edilərsə, ehtiyatların sayı (vakant yerlərin sayı) azalır, əks halda, ehtiyatların sayı dəyişməz qalır.

Bu paraqrafda baxılan modeldə [50, 51] məqalələrindəki müştəri tipləri anlayışı ehtiyatları xarab olan bilən KXES üçün tətbiq edilir. Dissertasiyada baxılan modeldə

[66, 67] məqalələrindəkindən fərqli olaraq aşağıdakı yeniliklər və əlavələr nəzərə alınır:

1. Ehtiyatları xarab olan modellərə baxılır.
2. Fərz edilir ki, sorğular sistemə anbar ehtiyatı sıfır olduğu halda da daxil ola bilər.
3. Ehtiyat əldə edən və etməyən sorğuların xidmət vaxtları fərqli qəbul edilir. Bu fərziyyə reallığa daha uyğundur. Çünki, əksər hallarda, ehtiyat əldə edən sorğuların xidmət vaxtı daha çox olur (məsələn, ehtiyatın qablaşdırılması əlavə vaxt tələb edə bilər). Ehtiyat əldə etməyən sorğular isə yalnız xidmət tələb etdiyindən onların xidmət vaxtı nisbətən az olur.
4. Baxılan modelin analizi üçün hesablama mürəkkəbliyi daha az olan fəza iriləşdirilməsi alqoritmi [65, s.29-33] tətbiq edilir. Alınan nəticələrin dəqiqliyi isə ədədi eksperimentlər vasitəsilə nümayiş olunur.

2.1.1. Modelin təsviri və keçid matrisinin qurulması

Baxılan sistemin riyazi modeli ilə tanış olaq. Fərz edilir ki, sistemə λ intensivlikli Puasson qanunu ilə sorğular daxil olur. Anbarda ehtiyatların sayı müsbət olduqda sistemə daxil olan sorğu server boşdursa, vahid ehtimalla xidmətə qəbul edilir. Xidmətdə olan sorğu xidmət bitənə qədər sistemi tərk etmir. Server məşğul olduqda isə sorğu növbəyə daxil olur. Növbədə olan sorğular FIFO prinsipi ilə idarə edilir, yəni, növbəyə ilk daxil olan sorğu server boş olan kimi xidmətə dərhal qəbul edilir.

Növbənin uzunluğu **sonlu** və ya **sonsuz** ola bilər. Növbənin uzunluğu sonlu olan halda sistemdə ola biləcək (xidmət olunan sorğu daxil) maksimal sorğuların sayı N ilə işarə olunur. Əgər sistemdə olan sorğuların sayı N həddinə çatırsa, sistemə daxil olan növbəti sorğu vahid ehtimalla itmiş qəbul edilir. Sonsuz növbəli sistemdə isə hər bir daxil olan sorğu server məşğul olduqda növbəyə qəbul edilir.

Baxılan sistemdə **iki növ sorğuların** olması fərz edilir. Belə ki, xidməti bitmiş birinci növ sorğular σ_1 ehtimalla ehtiyat əldə etmədən sistemi əliboş tərk edir. İkinci növ sorğular isə σ_2 ehtimalla məhsul əldə etdikdən sonra sistemi tərk edir, $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$. Birinci növ sorğunun xidmət prosesi eksponensial paylanmış μ_1 parametrlə təsadüfi

kəmiyyətlə təsvir edilir. İkinci növ sorğunun xidmət prosesi isə eksponensial paylanmış μ_2 parametrli təsadüfi kəmiyyətlə ifadə olunur və fərz edilir ki, $\mu_2 < \mu_1$.

Fərz edilir ki, sorğular sistemə anbar ehtiyatı sıfır olduğu halda da daxil ola bilər və bu zaman sorğular vahid ehtimalla növbəyə qoşulur. Anbar ehtiyatı olmadıqda növbədə gözləyən sorğular **səbirsiz** olur. Səbirsiz sorğular bir-birindən asılı olmayaraq τ parametrli eksponensial paylanmış təsadüfi vaxtlarda sistemi tərk edir.

Sadəlik üçün qəbul edilir ki, xidmət olunmuş ikinci növ sorğu vahid ölçülü ehtiyat əldə edir və bu zaman anbarda ehtiyatların səviyyəsi bir vahid azalır.

Baxılan sistem S ölçülü **ehtiyatları xarab olan məhdud anbara** malikdir. Anbar ehtiyatları bir-birindən asılı olmayaraq γ parametrli eksponensial paylanmış təsadüfi vaxtlarda xarab olur. Sorğunun xidməti zamanı onun üçün ayrılmış ehtiyatın xarab olmaması fərz edilir. Beləliklə, anbardakı ehtiyatların səviyyəsi ehtiyat sorğu tərəfindən alındıqdan sonra və ya xarab olma hadisəsi baş verdikdə azalır.

Anbarda ehtiyatların artırılması **(s, S) qaydasına** əsasən həyata keçirilir. Başqa sözlə desək, anbarda ehtiyatların səviyyəsi s həddinə düşdükdə sistem tərəfindən $(S - s)$ ölçülü EA tələbi yerləşdirilir. Ardıcıl EA tələblərinin qarşısını almaq məqsədilə fərz edilir ki, $s < \lfloor S/2 \rfloor$. EA tələbi eksponensial paylanmış ν parametrli təsadüfi vaxtlarda icra edilir.

Məsələnin qoyuluşu isə belədir: sistemdə ehtiyatların səviyyəsinin və növbənin uzunluğunun birgə stasionar paylanması tapılması tələb olunur. Stasionar ehtimallar tapıldıqdan sonra sistemin keyfiyyət göstəricilərinin qiymətləndirilməsi də məsələnin qoyuluşuna daxildir. Sistemin QoS-larına aşağıdakılar aiddir:

- S_{av} – Anbardakı ehtiyatların orta səviyyəsi;
- Γ_{av} – Ehtiyatların orta xarab olma intensivliyi;
- RR – EA tələblərinin orta intensivliyi;
- PL – Sorğuların itmə ehtimalı;
- L_{av} – Sistemdə sorğuların orta sayı.

Öncə, sonlu növbəli model üçün **keçid matrisinin** qurulmasını nəzərdən keçirək. Baxılan sistem vəziyyəti (m, n) ilə işarələnən ikiölçülü Markov zənciri ilə

təsvir olunur, burada m anbarda ehtiyatların səviyyəsini, n isə sistemdə sorğuların sayını ifadə edir. Sistemin vəziyyətlər fəzası (VF) aşağıdakı qaydada müəyyən olunur:

$$E = \{(m, n): m = 0, 1, \dots, S; n = 0, 1, \dots, N\} \quad (2.1.1)$$

Sistemin keçid matrisini Q ilə işarələyək. Sistemin (m_1, n_1) vəziyyətindən (m_2, n_2) vəziyyətinə keçid intensivliyi $q((m_1, n_1), (m_2, n_2))$ ilə işarə olunur. Modelin təsvirinə əsasən vəziyyətlər arasındakı keçidlər aşağıdakı hallarda baş verə bilər:

- A. Sistemə yeni sorğu daxil olduqda;
- B. Anbardakı ehtiyatlar xarab olduqda;
- C. Sorğunun xidməti bitdikdə;
- D. Səbirsiz sorğu sistemi tərk etdikdə;
- E. Anbar ehtiyatları EA tələbi ilə artırıldıqda.

Keçid intensivliklərini sadəlik üçün **üç qrupa** ayırmaq olar. **Birinci qrupa** anbar ehtiyatı s EA həddindən böyük olan vəziyyətlər arasındakı keçidlər aiddir ($m_1 > s$). Bu halda, səbirsiz sorğular olmadığından və EA tələbi yerləşdirilmədiyindən (D) və (E) hadisələri baş verə bilməz. Digər keçidlər isə aşağıdakı qaydada müəyyən olunur:

- Sistemə yeni sorğu daxil olduqda sistemdəki sorğuların sayı N -dən kiçikdirsə, sorğuların sayı bir vahid artır, yəni (m_1, n_1) vəziyyətindən $(m_1, n_1 + 1)$ vəziyyətinə keçid baş verir və bu keçidin intensivliyi λ -ə bərabərdir.
- Sorğu xidmət olunduqdan sonra ehtiyat əldə etmədən sistemi tərk edərsə, bu zaman sorğuların sayı bir vahid azalır, anbarda ehtiyatların səviyyəsi isə dəyişməz qalır, yəni (m_1, n_1) vəziyyətindən $(m_1, n_1 - 1)$ vəziyyətinə keçid baş verir və bu keçidin intensivliyi $\mu_1 \sigma_1$ -ə bərabərdir.
- Xidmət olunmuş sorğu anbar ehtiyatı əldə etdiyi halda isə həm növbənin, həm də anbar ehtiyatının səviyyəsi bir vahid azalır, yəni (m_1, n_1) vəziyyətindən $(m_1 - 1, n_1 - 1)$ vəziyyətinə keçid baş verir və bu keçidin intensivliyi $\mu_2 \sigma_2$ -ə bərabərdir.
- Anbar ehtiyatı xarab olduqda isə ehtiyatların səviyyəsi bir vahid azalır və (m_1, n_1) vəziyyətindən $(m_1 - 1, n_1)$ vəziyyətinə keçid baş verir. Növbənin

İkinci qrupa $(m_1, n_1) \in E$ vəziyyəti üçün $0 < m_1 \leq s$ şərtini ödəyən keçidlər daxildir. Bu halda da anbar boş olmadığı üçün (D) hadisəsi baş vermir. Bu qrup keçidlərin intensivlikləri (2.1.2) düsturlarına əsasən analogi qaydada hesablanır. Əlavə olaraq, anbar ehtiyatı EA tələbi ilə artırıldıqdan sonra (m_1, n_1) vəziyyətindən $(m_1 + S - s, n_1)$ vəziyyətinə keçid baş verir və bu keçidin intensivliyi ν -ə bərabərdir [bax, Şəkil 2.1.1]:

$$q((m_1, n_1), (m_2, n_2)) = \begin{cases} \lambda, & m_2 = m_1, n_2 = n_1 + 1 \\ \mu_1 \sigma_1, & m_2 = m_1, n_2 = n_1 - 1 \\ \mu_2 \sigma_2, & m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1 - 1 \\ m_1 \gamma, & m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1 = 0 \\ (m_1 - 1) \gamma, & m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1 > 0 \\ \nu, & m_2 = m_1 + S - s, n_2 = n_1 \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Nəhayət, **üçüncü qrup** keçid intensivliklərində fərz olunur ki, cari $(m_1, n_1) \in E$ vəziyyəti üçün $m_1 = 0$ şərti ödənilir. Bu halda, anbarda ehtiyat olmadığından (B) və (C) hadisələrinin baş verməsi mümkün deyil. (A) və (E) hadisələrinin intensivlikləri (2.3) düsturuna analogi qaydada hesablanır. Səbirsiz sorğu növbəni tərk etdikdə isə sistemdə sorğuların sayı bir vahid azalır və anbar ehtiyatı dəyişməz qalır, yəni $(0, n_1)$ vəziyyətindən $(0, n_1 - 1)$ vəziyyətinə keçid baş verir və bu keçidin intensivliyi $n_1 \tau$ -a bərabərdir

$$q((m_1, n_1), (m_2, n_2)) = \begin{cases} \lambda, & m_2 = m_1 = 0, n_2 = n_1 + 1 \\ n_1 \tau, & m_2 = m_1 = 0, n_2 = n_1 - 1 \\ \nu, & m_2 = m_1 + S - s, n_2 = n_1 \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Beləliklə, **Şəkil 1.2.1**, (2.1.2)-(2.1.4) düsturlarından alınır ki, baxılan ikiölçülü Markov zənciri erqodiklik şərtini ödəyir və sistemin vəziyyətləri üçün yeganə stasionar paylanma mövcuddur. Başqa sözlə desək, (2.1.1) vəziyyətlər fəzasının elementlərinin stasionar ehtimalları $p(m, n)$ (2.1.2)-(2.1.4) düsturları əsasında qurulmuş balans tənliklər sisteminin yeganə həllidir. Balans tənlikləri standart qaydaya uyğun olaraq qurulur (onun şəkli mürəkkəb olduğu üçün burada verilmir).

Stasionar ehtimallar məlum olduğdan sonra sistemin keyfiyyət göstəricilərini aşağıdakı düsturlarla hesablamaq olar:

$$\left. \begin{aligned}
 S_{av} &= \sum_{m=1}^S m \sum_{n=0}^N p(m, n) \\
 \Gamma_{av} &= \gamma \left[\sum_{m=1}^S \left(mp(m, 0) + \sum_{n=1}^n (m-1)p(m, n) \right) \right] \\
 RR &= \gamma(s+1)p(s+1, 0) + (\mu_2\sigma_2 + s\gamma) \sum_{n=1}^N p(s+1, n) \\
 PL &= \sum_{m=0}^S p(m, N) + \sum_{n=1}^{N-1} p(0, n) \frac{n\tau}{\lambda + n\tau} \\
 L_{av} &= \sum_{n=1}^N n \sum_{m=0}^S p(m, n)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5)$$

2.1.2. (s, S) qaydası tətbiq olunan model üçün təqribi üsul

Baxılan modelin **sonlu növbəli** ($N < \infty$) halı üçün stasionar ehtimalları hesablamaq üçün fəza iriləşdirilməsi algoritmi tətbiq olunacaq [62, s.48-51]. Şərti olaraq, cari modeli **MS/(s, S)** (Müxtəlif Sorğulu (s, S) qaydası tətbiq olunan model) ilə işarələyək. Fəza iriləşdirilməsi metodunun korrekt tətbiqi üçün fərz olunur ki, sorğuların daxilolma intensivliyi anbarda ehtiyatların xarabolma intensivliyindən və EA intensivliyindən olduqca böyükdür, yəni, $\lambda \gg \max\{\gamma, \nu\}$. Qeyd edək ki, bu fərziyyə reallığa tam uyğundur. Əlavə olaraq, öncə qeyd edildiyi kimi qəbul olunur ki, $\mu_2 \ll \mu_1$.

Yuxarıdakı şərtlərin doğruluğunu qəbul etməklə (2.1.1) vəziyyətlər fəzasını aşağıdakı qaydada alt fəzalara parçalayaq:

$$E = \bigcup_{m=0}^S E_m, \quad E_{m_1} \cap E_{m_2} = \emptyset, \quad m_1 \neq m_2 \text{ olduqda} \quad (2.1.6)$$

Burada $E_m = \{(m, n) \in E : n = 0, 1, \dots, N\}$.

Parçalanmadakı E_m sistemdəki sorğuların sayından asılı olmayaraq anbar ehtiyatı m olan bütün vəziyyətləri təşkil edir. Başqa sözlə desək, (2.1.6) parçalanması Şəkil 2.1.1-dəki keçid qrafının sətirlər üzrə bölgüsüdür. Əlavə olaraq, nəzərdə tutulur ki, n komponentinə nəzərən sətirlər arasındakı keçid intensivlikləri olduqca kiçikdir.

Növbəti addımda (2.1.6) parçalanmasına əsasən iriləşmə funksiyası aşağıdakı qaydada müəyyən olunur:

$$U((m, n)) = \langle m \rangle \quad (2.1.7)$$

Burada $\langle m \rangle$ E_m , $m = 0, 1, \dots, S$ vəziyyətlər sinfini təşkil edən iriləşmiş vəziyyətdir və iriləşmiş vəziyyətlər fəzası bu cür müəyyən olunur: $\Omega = \{\langle m \rangle: m = 0, 1, \dots, S\}$.

İkinci komponentə nəzərən iriləşmiş fəzalararası keçid intensivlikləri kiçik olduqda ilkin modelin stasionar ehtimallarını aşağıdakı təqribi düsturla hesablamaq olar [62, s.48]:

$$p(m, n) \approx \rho_m(n)\pi(\langle m \rangle) \quad (2.1.8)$$

Burada $\rho_m(n)$ vəziyyətlər fəzası E_m , $m = 0, 1, \dots, S$ olan parçalanma daxilində (m, n) vəziyyətinin stasionar ehtimalı, $\pi(\langle m \rangle)$ isə iriləşmiş $\langle m \rangle \in \Omega$ vəziyyətinin stasionar ehtimalına bərabərdir.

(2.1.6) parçalanmasından alınır ki, E_m vəziyyətlər sinfində hər bir vəziyyət yalnız ikinci komponentlə müəyyən olunur və birinci komponent dəyişməz qalır. Buna görə də, parçalanmış $(m, n) \in E_m$ vəziyyətlər sinfini tədqiq edərkən həmin sinfin vəziyyətləri sadəlik üçün $n, n = 0, \dots, N$ ilə işarə olunacaq.

Beləliklə, (2.1.2)-(2.1.4) düsturlarından alınır ki, E_m , $m = 1, \dots, S$ parçalanmaları daxilindəki vəziyyətlərin stasionar ehtimalları, $a = \lambda/(\mu_1\sigma_1)$ yüklü $M/M/1/N$ modelinin stasionar ehtimalları ilə üst-üstə düşür:

$$\rho_m(n) = a^n \frac{1 - a}{1 - a^{N+1}}; \quad m = 1, \dots, S \quad (2.1.9)$$

(2.1.9) düsturuna əsasən $\rho_m(n)$ m indeksindən asılı olmadığından aşağıda $m = 1, \dots, S$ olduqda bu indeks göstərilmir.

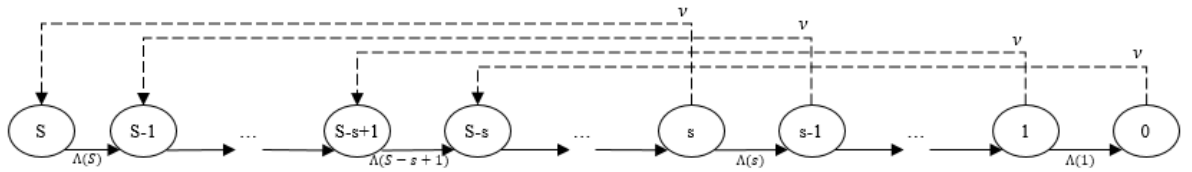
(2.1.4) düsturuna əsasən E_0 sinfi daxilindəki vəziyyətlərin stasionar ehtimalları, $b = \lambda/\tau$ yüklü $M/M/N/0$ modelinin stasionar ehtimalları ilə üst-üstə düşür:

$$\rho_0(n) = a^n \frac{\theta(n)}{\sum_{j=0}^N \theta(j)}; \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (2.1.10)$$

Burada fərz edilir ki, $\theta(j) = \frac{b^j}{j!}$.

$\pi(\langle m \rangle)$ stasionar ehtimallarını tapmaq üçün $\langle m_1 \rangle$ iriləşmiş vəziyyətindən $\langle m_2 \rangle$ iriləşmiş vəziyyətinə keçidi $q(\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle)$, $\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle \in \Omega$ ilə işarələyək. Bu keçid aşağıdakı düsturla hesablanır [62, s.49] (bax, Şəkil 2.1.2):

$$q(\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle) = \sum_{\substack{(m_1, n_1) \in E_{m_1} \\ (m_2, n_2) \in E_{m_2}}} q((m_1, n_1), (m_2, n_2)) p(m_1, n_1) \quad (2.1.11)$$



Şəkil 2.1.2 İriləşmiş vəziyyətlər arasındakı keçid qrafı

Keçid matrisindən, (2.1.9), (2.1.10) və (2.1.11) düsturlarından istifadə etməklə müəyyən əməliyyatlardan sonra aşağıdakı formulu almış oluruq (bax, Şəkil 2.1.2):

$$q(\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle) = \begin{cases} \Lambda(m_1), & m_2 = m_1 - 1 \\ v, & m_1 \leq s, m_2 = m_1 + S - s \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases} \quad (2.1.12)$$

Burada $\Lambda(m_1) = m_1 \gamma \rho(0) + (1 - \rho(0))(\mu_2 \sigma_2 + (m_1 - 1)\gamma)$, $m_1 = 1, \dots, S$; $\Lambda(0) = 0$.

(2.1.12) formulundan istifadə etməklə iriləşmiş vəziyyətlər fəzası (bax, Şəkil 2.1.2) üçün stasionar paylanmanı hesablayaq. İlk öncə, $0 \leq m \leq s$ halı üçün balans tənliklərini quraq:

$$(2.1.13)$$

$$\begin{cases} \pi(\langle 0 \rangle)(\nu + \Lambda(0)) = \pi(\langle 1 \rangle)\Lambda(1) \\ \pi(\langle 1 \rangle)(\nu + \Lambda(1)) = \pi(\langle 2 \rangle)\Lambda(2) \\ \dots \\ \pi(\langle s \rangle)(\nu + \Lambda(s)) = \pi(\langle s + 1 \rangle)\Lambda(s + 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi(\langle 0 \rangle) = \pi(\langle 1 \rangle) \frac{\Lambda(1)}{\nu + \Lambda(0)} \\ \pi(\langle 1 \rangle) = \pi(\langle 2 \rangle) \frac{\Lambda(2)}{\nu + \Lambda(1)} \\ \dots \\ \pi(\langle s \rangle) = \pi(\langle s + 1 \rangle) \frac{\Lambda(s + 1)}{\nu + \Lambda(s)} \end{cases}$$

(2.1.13) sistemində bərabərliklərin sağ tərəfində rekursiv əvəzləmələr apardıqdan sonra aşağıdakı formulu almış oluruq:

$$\pi(\langle m \rangle) = \pi(\langle s + 1 \rangle) \prod_{i=m+1}^{s+1} \frac{\Lambda(i)}{\nu + \Lambda(i-1)}, \quad 0 \leq m \leq s \text{ olduqda} \quad (2.1.14)$$

Növbəti addımda $s + 1 \leq m \leq S - s$ halı üçün balans tənliklərinə baxaq:

$$\begin{cases} \pi(\langle s + 1 \rangle)\Lambda(s + 1) = \pi(\langle s + 2 \rangle)\Lambda(s + 2) \\ \pi(\langle s + 2 \rangle)\Lambda(s + 2) = \pi(\langle s + 3 \rangle)\Lambda(s + 3) \\ \dots \\ \pi(\langle S - s - 1 \rangle)\Lambda(S - s - 1) = \pi(\langle S - s \rangle)\Lambda(S - s) \end{cases} \quad (2.1.15)$$

(2.1.15) sistemini aşağıdakı qaydada yazmaq:

$$\begin{cases} \pi(\langle s + 1 \rangle) \frac{\Lambda(s + 1)}{\Lambda(s + 2)} = \pi(\langle s + 2 \rangle) \\ \pi(\langle s + 2 \rangle) \frac{\Lambda(s + 2)}{\Lambda(s + 3)} = \pi(\langle s + 3 \rangle) \\ \dots \\ \pi(\langle S - s - 1 \rangle) \frac{\Lambda(S - s - 1)}{\Lambda(S - s)} = \pi(\langle S - s \rangle) \end{cases} \quad (2.1.16)$$

(2.1.16) formullarında bərabərliklərin sol tərəfində rekursiv əvəzləmələr aparıb uyğun ixtisarlar etdikdən sonra aşağıdakı düsturu almış oluruq:

$$\pi(\langle m \rangle) = \pi(\langle s + 1 \rangle) \frac{\Lambda(s+1)}{\Lambda(m)}, \quad s + 1 \leq m \leq S - s \text{ olduqda} \quad (2.1.17)$$

Sonuncu $S - s + 1 \leq m \leq S$ halı üçün balans tənlikləri aşağıdakı qaydada qurulur:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(\langle S - s + 1 \rangle) \Lambda(S - s + 1) = \pi(\langle S - s + 2 \rangle) \Lambda(S - s + 2) + \pi(\langle 1 \rangle) \nu \\ \pi(\langle S - s + 2 \rangle) \Lambda(S - s + 2) = \pi(\langle S - s + 3 \rangle) \Lambda(S - s + 3) + \pi(\langle 2 \rangle) \nu \\ \dots \\ \pi(\langle S - 1 \rangle) \Lambda(S - 1) = \pi(\langle S \rangle) \Lambda(S) + \pi(\langle s - 1 \rangle) \nu \\ \pi(\langle S \rangle) \Lambda(S) = \pi(\langle s \rangle) \nu \end{array} \right.$$

↓

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(\langle S - s + 1 \rangle) = \pi(\langle S - s + 2 \rangle) \frac{\Lambda(S - s + 2)}{\Lambda(S - s + 1)} + \pi(\langle 1 \rangle) \frac{\nu}{\Lambda(S - s + 1)} \\ \pi(\langle S - s + 2 \rangle) = \pi(\langle S - s + 3 \rangle) \frac{\Lambda(S - s + 3)}{\Lambda(S - s + 2)} + \pi(\langle 2 \rangle) \frac{\nu}{\Lambda(S - s + 2)} \\ \dots \\ \pi(\langle S - 1 \rangle) = \pi(\langle S \rangle) \frac{\Lambda(S)}{\Lambda(S - 1)} + \pi(\langle s - 1 \rangle) \frac{\nu}{\Lambda(S - 1)} \\ \pi(\langle S \rangle) = \frac{\pi(\langle s \rangle) \nu}{\Lambda(S)} \end{array} \right. \quad (2.1.18)$$

(2.1.18) bərabərliklərinin sağ tərəfində uyğun rekursiv əvəzləmələr aparıb ixtisarla etdikdən sonra (2.1.13) və (2.1.14) düsturlarını nəzərə almaqla aşağıdakı formulu almış oluruq:

$$\pi(\langle m \rangle) = \pi(\langle s + 1 \rangle) \frac{\nu}{\Lambda(m)} \sum_{i=m-s+s}^s \alpha_i, \quad S - s + 1 \leq m \leq S \text{ olduqda} \quad (2.1.19)$$

(2.1.12)-(2.1.19) formullarından $\pi(\langle m \rangle)$ stasionar ehtimalları üçün aşağıdakı düsturları almış oluruq:

$$\pi(\langle m \rangle) = \begin{cases} \alpha_m \pi(\langle s + 1 \rangle), & 0 \leq m \leq s \text{ olduqda} \\ \beta_m \pi(\langle s + 1 \rangle), & s + 1 \leq m \leq S - s \text{ olduqda} \\ \chi_m \pi(\langle s + 1 \rangle), & S - s + 1 \leq m \leq S \text{ olduqda} \end{cases} \quad (2.1.20)$$

Burada $\alpha_m = \prod_{i=m+1}^{s+1} \frac{\Lambda(i)}{\nu + \Lambda(i-1)}$

$$\beta_m = \frac{\Lambda(s + 1)}{\Lambda(m)}$$

$$\chi_m = \frac{\nu}{\Lambda(m)} \sum_{i=m-s+s}^s \alpha_i.$$

(2.1.20) formulundakı $\pi(\langle s+1 \rangle)$ stasionar ehtimalları isə normallaşdırma şərtindən tapılır:

$$\pi(\langle s+1 \rangle) = \left(\sum_{m=0}^s \alpha_m + \sum_{m=s+1}^{s-s} \beta_m + \sum_{m=s-s+1}^s \chi_m \right)^{-1} \quad (2.1.21)$$

Beləliklə, $\rho_m(n)$ və $\pi(\langle m \rangle)$ məlum olduğdan sonra ilkin modelin stasionar ehtimalları (2.1.8) düsturu ilə hesablanır. Stasionar ehtimallar məlum olduğdan sonra keyfiyyət göstəriciləri üçün (2.1.5) formullarında (2.1.8) düsturuna uyğun əvəzləmələri etdikdən sonra aşağıdakı təqribi düsturları əldə edirik:

$$\left. \begin{aligned} S_{av} &\approx \sum_{m=1}^s m \pi(\langle m \rangle) \\ \Gamma_{av} &\approx \gamma \left[\sum_{m=1}^s \pi(\langle m \rangle) (m\rho(0) + (m-1)(1-\rho(0))) \right] \\ RR &\approx \pi(\langle s+1 \rangle) ((s+1)\gamma\rho(0) + (\mu_2\sigma_2 + s\gamma)(1-\rho(0))) \\ PL &\approx \rho(N)(1-\pi(\langle 0 \rangle)) + \pi(\langle 0 \rangle) \left(\rho_0(N) + \sum_{n=1}^{N-1} \rho_0(n) \frac{n\tau}{\lambda + n\tau} \right) \\ L_{av} &\approx \pi(\langle 0 \rangle) \sum_{n=1}^N n\rho_0(n) + (1-\pi(\langle 0 \rangle)) \sum_{n=1}^N n\rho(n) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.22)$$

Baxılan (s, S) EA qaydası tətbiq olunan ikiölçülü modelin **sonsuz növbəli** ($N = \infty$) halı üçün də fəza iriləşdirilməsi algoritmini tətbiq edək. Sonsuz növbəli halda vəziyyətlər fəzası və keçid matrisi sonsuz olduğundan stasionar ehtimalları hesablamaq üçün dəqiq analitik üsul mövcud deyil. Sonsuz növbəli modelin vəziyyətlər fəzasını sonluya analogi qaydada müəyyən edək:

$$E = \{(m, n): m = 0, 1, \dots, S; n = 0, 1, \dots\} \quad (2.1.23)$$

Sadəlik naminə, sonsuz hal üçün də eyni işarələmələrdən istifadə olunacaq. Keçid matrisinin elementləri, analogi qaydada, (2.1.2)-(2.1.4) düsturları ilə müəyyən edilir. Keyfiyyət göstəriciləri isə (2.1.5) düsturları ilə hesablanır, sadəcə, bu düsturlarda $N = \infty$ əvəzləməsi edilir. Əlavə olaraq, sonsuz halda sorğuların itməsi yalnız səbirsizlik səbəbindən baş verdiyindən sorğuların itmə ehtimalının (PL) hesablanmasında birinci toplanan ləğv edilir.

Keçid matrisi sonsuz olduğundan uyğun balans tənliklər sistemi də sonsuzdur və stasionar ehtimalların hesablanması dəqiq üsullarla praktiki qeyri-mümkündür. Buna görə, sonlu hal üçün istifadə olunan fəza iriləşdirilməsi alqoritmi sonsuz hal üçün analogi qaydada tətbiq edək.

(2.1.23) ilkin vəziyyətlər fəzasının alt fəzalara parçalanması və iriləşdirmə funksiyası sonlu növbəli modelə analogi olaraq (2.1.6) və (2.1.7) düsturları ilə müəyyən edilir. Baxılan halda, (2.1.6) $E_m, m = 1, \dots, S$ parçalanmaları daxilindəki vəziyyətlərin stasionar ehtimalları, $a = \lambda/(\mu_1 \sigma_1)$ yüklü $M/M/1$ modelinin stasionar ehtimalları ilə üst-üstə düşür:

$$\rho(n) = a^n(1 - a), n = 0, 1, \dots \quad (2.1.24)$$

Fərz edilir ki, sistemin *erqodiklik şərti* ödənilir: $a < 1$.

E_0 sinfi daxilindəki vəziyyətlərin stasionar ehtimalları, $b = \lambda/\tau$ yüklü $M/M/\infty$ modelinin stasionar ehtimalları ilə üst-üstə düşür:

$$\rho_0(n) = \frac{b^n}{n!} e^{-b}; n = 0, 1, \dots \quad (2.1.25)$$

(2.1.7) iriləşmiş vəziyyətlərin stasionar ehtimalları (2.1.12) və (2.1.20) düsturları ilə analogi qaydada hesablanır. Keyfiyyət göstəricilərindən orta anbar ehtiyatı (S_{av}), orta xarab olma intensivliyi (Γ_{av}), EA tələbinin yerləşdirilmə intensivliyi (RR) sonlu haldakı (2.1.22) düsturları ilə eyni qaydada hesablanır. Əlavə olaraq, $1 - \rho(0) = a$ bərabərliyi ödəndiyindən düsturlar daha da sadələşir. Sorğuların itmə ehtimalı (PL) və növbənin orta uzunluğu (L_{av}) aşağıdakı düsturlarla müəyyən edilir:

$$(2.1.26)$$

$$\left. \begin{aligned} PL &\approx \pi(\langle 0 \rangle) e^{-b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \frac{n\tau}{\lambda + n\tau} \\ L_{av} &\approx \pi(\langle 0 \rangle) b + (1 - \pi(\langle 0 \rangle)) \frac{a}{1 - a} \end{aligned} \right\}$$

İtmə ehtimalının hesablanması düsturunda sonsuz ardıcillıq uyğun majorant ardıcillıq $(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n!})$ yığıldığı üçün yığılandır. Praktiki olaraq, hesablama zamanı ardıcillığın cəmi dəyişməyə qədər n artırılır və dəyişiklik kifayət qədər kiçik olduqda və ya heç olmadıqda cəm tapılmış qəbul edilir.

Əlavə olaraq, baxılan modeldə $\gamma = 0$ qəbul etməklə uyğun **məhsulları xarab olmayan** hal üçün düsturlar almış oluruq. Yəni, məhsulları xarab olmayan model baxılan modelin xüsusi halıdır.

Baxılan modelin (s, S) EA qaydası tətbiq olunan halı üçün əldə olunmuş nəticələr [62] məqaləsində təqdim olunmuşdur.

2.1.3. $(s, S-m)$ qaydası tətbiq olunan model

Öncə baxılan müxtəlif tipli sorğuları olan modelin dəyişən ölçülü tam doldurma EA qaydası tətbiq olunan növünü nəzərdən keçirək. Cari modeli şərti olaraq **MS/(m, S)** (Müxtəlif Sorğulu dəyişən $(s, S - m)$ EA qaydası tətbiq olunan model) ilə işarələyək. Eyni zamanda, burada öncə baxılan **MS/(s, S)** modelin daha ümumi forması analiz ediləcək. **MS/(s, S)** modelindən fərqli olaraq aşağıdakılar qəbul edilir:

1. **MS/(s, S)** modelində fərz olunmuşdur ki, anbar ehtiyatı sıfır olduqda belə sorğular növbəyə daxil olur. Cari modeldə anbar ehtiyatı olmadıqda sistemə daxil olan sorğular Bernulli sxeminə əsasən ϕ_1 ehtimalla növbəyə durur və ϕ_2 ehtimalla itmiş qəbul olunaraq sistemi tərk edir, $\phi_1 + \phi_2 = 1$.
2. Stasionar ehtimalları hesablamaq üçün SG metodu tətbiq olunur [2, s.164-165].
3. Anbar ehtiyatı olmadıqda növbənin sonunda duran maksimal M ($M \geq 1$) sayda sorğu səbirsiz olur. Bu fərziyyə reallığa uyğundur, belə ki, uzun növbələrdə, əsasən, sonda duran sorğular səbirsiz olub növbəni tərk edir.

Burada M parametri SG metodunun tətbiqi zamanı spektral hədd kimi istifadə olunur.

4. Anbar ehtiyatının artırılması dəyişən həcmli tam doldurma qaydasına əsasən həyata keçirilir. Fərz edilir ki, hər bir EA tələbi ν parametrlı eksponensial paylanmış təsadüfi vaxtlarda icra edilir. Anbarda ehtiyatların sayı öncədən müəyyən edilmiş $s < S/2$ həddinə çatdıqda EA tələbi yerləşdirilir və EA tələbi icra olunduğu anda anbara $S - m$ (m - icra anında anbarın səviyyəsini göstərir) sayda ehtiyat artırılır.
5. Əlavə olaraq, EA tələbinin orta həcmi (R_{av}) və itmə ehtimalı əvəzinə sorğuların orta itmə intensivliyi (LR) kimi QoS göstəricilər analiz edilir.

Burada da modelin vəziyyətlər fəzası analogi olaraq (2.1.23) ilə müəyyən olunur. Baxılan modelin keçid matrisi psevdo-kod vasitəsilə Şəkil 2.1.3-də təqdim olunmuşdur.

```

1: function QMATRIXELEMENT( $m_1, n_1, m_2, n_2$ )           ▷  $q((m_1, n_2), (m_2, n_2))$ 
2:   define  $q := 0$ 
3:   if  $m_1 > 0$  then
4:     if  $m_2 = m_1$  and  $n_2 = n_1 + 1$  then  $q := \lambda$ 
5:     else if  $m_2 = m_1$  and  $n_2 = n_1 - 1$  then  $q := \mu_1 \sigma_1$ 
6:     else if  $m_2 = m_1 - 1$  and  $n_2 = n_1 - 1$  then  $q := \mu_2 \sigma_2$ 
7:     else if  $m_2 = m_1 - 1$  and  $n_2 = n_1 = 0$  then  $q := m_1 \gamma$ 
8:     else if  $m_2 = m_1 - 1$  and  $n_2 = n_1 > 0$  then  $q := (m_1 - 1) \gamma$ 
9:     else if  $m_1 \leq s$  and  $m_2 = S$  and  $n_2 = n_1$  then  $q := \nu$ 
10:  else if  $m_1 = 0$  then
11:    if  $m_2 = 0$  and  $n_2 = n_1 + 1$  then  $q := \lambda \phi_1$ 
12:    else if  $m_2 = 0$  and  $n_2 = n_1 - 1$  then  $q := \min(n_1, M) \tau$ 
13:    else if  $m_2 = S$  and  $n_2 = n_1$  then  $q := \nu$ 
14:  endif
15:  return  $q$ 

```

Şəkil 2.1.3 Dəyişən ölçülü doldurma qaydası tətbiq edilən modelin keçid matrisinin psevdo-kod vasitəsilə ifadəsi

Şəkil 2.1.3-dən göründüyü kimi MS/(m, S) modelin Q matrisinin elementləri $m_1 > s$ halı üçün (s, S) doldurma qaydası tətbiq olunan modelin keçid matrisi ilə eyni olsa da, $m_1 \leq s$ halı üçün olan keçidlərdə fərqlər mövcuddur.

Keyfiyyət göstəricilərindən anbar ehtiyatlarının orta səviyyəsi (S_{av}), ehtiyatların orta xarab olma intensivliyi (Γ_{av}), EA tələbinin orta intensivliyi (RR) (2.1.5)

düsturlarına əsasən hesablanır. Digər QoS-lardan EA tələbinin orta həcmi (R_{av}) və sorğuların orta itmə intensivliyi (LR) aşağıdakı formullarla müəyyən olunur:

$$\left. \begin{aligned} R_{av} &= \sum_{m=S-s}^S m \sum_{n=0}^{\infty} p(S-m, n) \\ LR &= \lambda \phi_2 \sum_{n=0}^{\infty} p(0, n) + \tau \sum_{n=1}^{\infty} \min(n, M) p(0, n) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.27)$$

Cari MS/(m, S) modelinin keçid matrisi (bax, **Şəkil 2.1.3**) SG üçün əlverişli olduğundan stasionar ehtimallar bu metodun tətbiqi ilə hesablanacaq.

SG metoduna uyğun olaraq modelin keçid matrisini üç fərqli alt matrisə parçalayaq. İlkin olaraq, A matrisi növbənin uzunluğu dəyişməyən $(m_1, n) \rightarrow (m_2, n)$ keçidlərindən ibarətdir:

$$A_n(m_1, m_2) = \begin{cases} m_1 \gamma, & m_2 = m_1 - 1, n = 0 \\ (m_1 - 1) \gamma, & m_2 = m_1 - 1, n > 0 \\ \nu, & m_2 = S \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases} \quad (2.1.28)$$

B matrisi növbənin uzunluğu artan $(m_1, n) \rightarrow (m_2, n + 1)$ keçidlərindən təşkil olunur:

$$B_n(m_1, m_2) = \begin{cases} \lambda, & m_2 = m_1, m_1 > 0 \\ \lambda \phi_1, & m_2 = m_1, m_1 = 0 \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases} \quad (2.1.29)$$

Sonuncu C matrisi növbənin uzunluğu azalan $(m_1, n) \rightarrow (m_2, n - 1)$ keçidlərindən ibarət olur:

$$C_n(m_1, m_2) = \begin{cases} \mu_1 \sigma_1, & m_2 = m_1, m_1 > 0 \\ \mu_2 \sigma_2, & m_2 = m_1 - 1, m_1 = 0 \\ \min(n, M) \tau, & m_2 = m_1 = 0 \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases} \quad (2.1.30)$$

Baxılan MS/(m, S) modelinin M parametri spektral hədd kimi istifadə olunur və **Şəkil 2.1.3**-ə əsasən SG metodunun tətbiqi üçün zəruri və kafi şərt olan aşağıdakı münasibətlər alınır:

$$A_n = A, B_n = B, C_n = C, \text{ əgər } n \geq M \quad (2.1.31)$$

Sistemin balans tənlikləri üzərindəki müəyyən cəbri çevirmələrdən sonra və normallaşdırma şərti əlavə olunduqdan sonra aşağıdakı düsturları almış oluruq:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_j [D_j^A + D_j^B + D_j^C] = v_{j-1} B_{j-1} + v_j A_j + v_{j+1} C_{j+1}; j \leq M - 1; v_{-1} = 0 \\ v_j [D^A + D^B + D^C] = v_{j-1} B + v_j A + v_{j+1} C; j \geq M \\ \sum_{j=0}^{\infty} v_j e = 0 \end{array} \right. \quad (2.1.32)$$

Beləliklə, SG metodunu tətbiq etməklə [2, s.165], stasionar ehtimallar üçün aşağıdakı düsturları almış oluruq:

$$p(m, n) = \sum_{k=0}^S a_k \psi_k(m) \lambda_k^{n-N+1}, n \geq M - 1 \quad (2.1.33)$$

və ya $p(m) = \sum_{n=0}^{M-2} p(m, n) + \sum_{k=0}^S \frac{a_k \psi_k(m)}{1 - \lambda_k}$

Sistemin QoS göstəriciləri isə aşağıdakı düsturlarla hesablanır:

$$(2.1.34)$$

$$\left. \begin{aligned}
S_{av} &= \sum_{m=1}^S mp(m) \\
L_{av} &= \sum_{m=1}^S m \left[\sum_{n=0}^{M-2} np(m, n) + \sum_{k=0}^S \frac{a_k \psi_k(m) \lambda_k}{(1 - \lambda_k)^2} \right] \\
\Gamma_{av} &= \gamma \sum_{m=1}^S [mp(m, 0) + (m - 1)(p(m) - p(m, 0))] \\
R_{av} &= \sum_{m=S-s}^S mp(S - m) \\
LR &= \lambda \phi_2 p(0) + \tau \left(\sum_{n=1}^{M-2} np(0, n) + M \sum_{k=0}^S \frac{a_k \psi_k(0)}{1 - \lambda_k} - p(0, M - 1) \right)
\end{aligned} \right\}$$

(2.1.34) düsturlarında $(\lambda_k, \psi_k), k = 0, \dots, S$ vahid çevrə daxilindəki məxsusi qiymətlər və məxsusi vektorlar cütlükləridir və onların sayı $(S + 1)$ -ə bərabər olmalıdır. Bu şərt sistemin erqodik olması üçün zəruri və kafidir. Düsturdakı $p(m)$ funksiyası stasionar vəziyyətdə anbar ehtiyatının m olması ehtimalını ifadə edir. a_k SG metodunun tətbiqi nəticəsində alınan əmsallardır. Qeyd edək ki, (λ_k, ψ_k) və a_k həm real, həm də kompleks qiymətlər ala bilər. Əlavə olaraq, $p(m, n), n < M - 1$ ehtimalları rekursiv qaydada (2.1.32) balans tənliklər sistemindən hesablanır. RR performans göstəricisi isə (2.1.5) düsturlarından tapılır.

Baxılan model üçün **SG alqoritminin hesablama mürəkkəbliyini** analiz edək. Bu alqoritm sonsuz Markov sistemlərinin dəqiq həllinin tapılması üçün hesablama mürəkkəbliyi və tələb olunan şərtlərin ağırlığına görə eyni məqsəd üçün istifadə olunan bir çox alqoritmlərdən (Seelen, Matrix-Geometric, Gauss-Seidel) üstündür [22, s.68-70]. Bu metod məxsusi qiymətlər və məxsusi vektorlar cütlüklərinin hesablanması, $(S + 1)$ ölçülü tənliklər sistemini həll etməyi və $M - 1$ sayda rekursiv hesablama əməliyyatları aparmağı, eyni zamanda, kompleks ədədlər və vektorlarla işləməyi tələb edir. Cari modeldə M çox da böyük qiymətlər almadığından alqoritm hesablamada mürəkkəbliyi kifayət qədər azalır. Bununla belə, apardığımız ədədi ekperimentlərdə bəzən bəd xassəli matris (badly conditioned) tənliklər sistemi alınmışdır ki, bu da

alqoritmin kompüterlə realizasiyasını çətinləşdirir. Bu səbəblərə görə, bəzən SG metodu praktiki tətbiqi çətin olan alqoritmlərdən hesab edilir.

Beləliklə, $MS/(m, S)$ modeli üçün SG metodunu tətbiq etməklə stasionar ehtimalları və keyfiyyət göstəricilərini hesablamaq üçün analitik düsturlar almış olduq.

2.1.4. (S-1, S) qaydası tətbiq olunan model

Ədəbiyyatda bizə məlum işlərdə tətqiq olunan KXES modellərinin əksəriyyətində (s, S) EA qaydası tətbiq edilir. Mövcud ədəbiyyatın analizindən belə nəticəyə gəlirik ki, $(S - 1, S)$ qaydası tətbiq olunan modellər kifayət qədər araşdırılmayıb. Bu mövzuda yazılmış məqalələrə [37, s.411, 41, s.95, 46, s.493] nümunə gətirmək olar. Bu məqalələrin heç birində ehtiyatları xarab olan modellərə baxılmır. Buna görə də, biz $(S - 1, S)$ EA qaydasını öncə təqdim olunan müxtəlif tipli sorğuları olan və anbar ehtiyatı xarab olan modelə tətbiq etmək qərarına gəldik. Cari modeli, şərti olaraq, **$MS/(S-1, S)$** (Müxtəlif Sorğulu $(S - 1, S)$ qaydası tətbiq olunan model) kimi işarələyək.

Yeni təqdim olunan $MS/(S-1, S)$ modelinin sonlu və sonsuz növbəli variantlarına baxılacaq və stasionar ehtimallar fəza iriləşdirilməsi alqoritmi vasitəsilə hesablanacaq. Burada $MS/(s, S)$ modeli əsas götürülərək aşağıdakı dəyişiklər daxil edək:

1. $MS/(s, S)$ modelində fərz olunur ki, anbar ehtiyatı sıfır olduqda belə sorğular növbəyə daxil olur. Cari modeldə isə anbar ehtiyatı olmadıqda sistemə daxil olan sorğular Bernulli sxeminə əsasən ϕ_1 ehtimalla növbəyə durur və ϕ_2 ehtimalla itmiş qəbul olunaraq sistemi tərk edir, $\phi_1 + \phi_2 = 1$.
2. $MS/(S-1, S)$ modelində EA tələbləri $(S - 1, S)$ qaydasına əsasən həyata keçirilir.

Öncə, cari modelin **sonlu növbəli** variantı üçün məsələni həll edək. Vəziyyətlər fəzası $MS/(s, S)$ modelinə analogi qaydada (2.1.1) ilə müəyyən olunur. Modelin $m_1 > 0$ halı üçün vəziyyətlər arasındakı keçid matrisi aşağıdakı düsturlarla müəyyən olunur:

$$(2.1.35)$$

$$q((m_1, n_1), (m_2, n_2)) = \begin{cases} \lambda, & m_2 = m_1, n_2 = n_1 + 1 \\ \mu_1 \sigma_1, & m_2 = m_1, n_2 = n_1 - 1 \\ \mu_2 \sigma_2, & m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1 - 1 \\ m_1 \gamma, & m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1 = 0 \\ (m_1 - 1) \gamma, & m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1 > 0 \\ (S - m_1) \nu, & m_2 = m_1 + 1, n_2 = n_1 \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases}$$

$m_1 = 0$ olan halda isə keçid matrisinin elementləri aşağıdakı qaydada hesablanır:

$$q((m_1, n_1), (m_2, n_2)) = \begin{cases} \lambda \phi_1, & m_2 = m_1 = 0, n_2 = n_1 + 1 \\ n_1 \tau, & m_2 = m_1 = 0, n_2 = n_1 - 1 \\ S \nu, & m_2 = 1, n_2 = n_1 \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases} \quad (2.1.36)$$

(2.1.35) və (2.1.36) düsturlarından görüldüyü kimi cari modelin MS/(s, S) və MS/(m, S) modellərinin keçid matrislərindən əsas fərqi EA tələbinin yerinə yetirilməsi ilə əlaqəli olan keçidlərdədir. $(S - 1, S)$ qaydası tətbiq olunan cari modelin əsas üstünlüyü (s, S) və $(s, S - m)$ EA qaydalarından fərqli olaraq paralel birdən daha çox EA tələblərinin həyata keçirilməsinin mümkünlüyüdür.

Növbənin orta uzunluğu (L_{av}), anbar prosesləri ilə əlaqəli QoS-lar (S_{av}, Γ_{av}, RR), (2.1.5) düsturlarına əsasən hesablanır. Cari modeldə sorğulara xidmət prosesləri ilə əlaqəli olan iki yeni QoS göstəricilərinə baxaq:

- RL_b növbənin dolu olması səbəbindən və anbar ehtiyatı olmadıqda daxil olan sorğuların itməsi intensivliyidir. Bu keyfiyyət göstəricisi yalnız sonlu model üçün daxil edilir və sistemdə sorğuların sayı mümkün maksimal say, yəni, N -ə bərabər olduqda baş verir.
- RL_r isə səbirsizlik səbəbindən sorğuların sistemi tərk etməsi intensivliyini qiymətləndirmək üçündür.

RL_b və RL_r QoS-ları aşağıdakı düsturlarla hesablanır:

$$(2.1.37)$$

$$\left. \begin{aligned} RL_b &= \lambda \left(\sum_{m=0}^S p(m, N) + \phi_2 \sum_{n=0}^{N-1} p(0, n) \right) \\ RL_r &= \tau \sum_{n=1}^N np(0, n) \end{aligned} \right\}$$

Stasionar ehtimalları hesablamaq üçün fəza iriləşdirilməsi alqoritmini tətbiq edək. Alqoritmin tətbiqinin korrekliyini və dəqiqliyini artırmaq məqsədilə fərz olunur ki, $\lambda \gg \gamma$. Bu fərziyyə reallığa tam uyğundur və bir çox sistemlərdə ödənilir.

Burada da ilkin vəziyyətlər fəzasının alt fəzalara parçalanması (2.1.6), iriləşmə funskiyası (2.1.7) daxil edilir. Stasionar ehtimallar (2.1.8) düsturlarına uyğun hesablanır. E_m fəzaları daxilindəki stasionar ehtimallar $a = \lambda/(\mu_1\sigma_1)$ yüklü $M/M/1/N$ modelinin stasionar ehtimalları ilə üst-üstə düşür, yəni, (2.1.8) düsturundakı $\rho_m(n)$ ehtimalları uyğun olaraq (2.1.9) və (2.1.10) formulları ilə hesablanır.

İriləşdirilmiş vəziyyətlərin $\pi(\langle m \rangle)$ stasionar ehtimallarını tapmaq üçün MS/(s, S) modelinə analogi qaydada $\langle m_1 \rangle$ iriləşmiş vəziyyətindən $\langle m_2 \rangle$ iriləşmiş vəziyyətinə keçidi $q(\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle)$, $\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle \in \Omega$ ilə işarələyək. Bu keçid eynilə (2.1.11) düsturu ilə hesablanır. (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11), (2.1.35) və (2.1.36) düsturlarından istifadə etməklə müəyyən çevirmələrdən sonra $q(\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle)$ kəmiyyəti üçün aşağıdakı formulu əldə etmiş oluruq:

$$q(\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle) = \begin{cases} \Lambda(m_1), & m_2 = m_1 - 1 \\ (S - m_1)v, & m_1 \leq s, m_2 = m_1 + 1 \\ 0, & digər hallarda \end{cases} \quad (2.1.38)$$

Burada $\Lambda(m_1) = m_1\gamma\rho(0) + (1 - \rho(0))(\mu_2\sigma_2 + (m_1 - 1)\gamma)$, $m_1 = 1, \dots, S$.

(2.1.38) düsturundan isə $\pi(\langle m \rangle)$ stasionar ehtimalları üçün aşağıdakı düsturu almış oluruq:

$$\pi(\langle m \rangle) = \frac{S! v^m}{(S - m)! \prod_{i=1}^m \Lambda(i)} \pi(\langle 0 \rangle), \quad m = 1, \dots, S \quad (2.1.39)$$

Burada $\pi(\langle 0 \rangle)$ ehtimalı normallaşdırma şərtindən istifadə etməklə aşağıdakı qaydada hesablanır:

$$\pi(\langle 0 \rangle) = \left(\sum_{m=0}^S \frac{S! \nu^m}{(S-m)! \prod_{i=1}^m \Lambda(i)} \right)^{-1} \quad (2.1.40)$$

Anbarın orta səviyyəsi (S_{av}), anbarın orta xarab olma intensivliyi (Γ_{av}), növbənin orta uzunluğu (L_{av}) üçün təqribi düsturlar eynilə (2.1.22) formullarında olduğu kimidir. Digər keyfiyyət göstəricilərini təqribi olaraq aşağıdakı düsturlarla hesablamaq mümkündür:

$$\left. \begin{aligned} RR &\approx \sum_{m=1}^S m \gamma \rho(0) \pi(\langle m \rangle) + (1 - \rho(0) \pi(\langle m \rangle)) ((m-1)\gamma + \mu_2 \sigma_2) \\ RL_b &\approx \lambda (\rho(N) (1 - \pi(\langle 0 \rangle)) + \pi(\langle 0 \rangle) (\rho_0(N) + \phi_2 (1 - \rho_0(N)))) \\ RL_r &\approx \tau \pi(\langle 0 \rangle) \sum_{n=1}^N n \rho_0(n) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.41)$$

MS/(S-1, S) modelinin **sonsuz növbəli** $N = \infty$ halı üçün də stasionar ehtimalları fəza iriləşdirilməsi alqoritmi ilə hesablayaq. Qeyd edək ki, bu halda keçid matrisi sonsuz olduğundan stasionar ehtimalları hesablamaq üçün analitik üsul mövcud deyil.

(2.1.6) parçalanmasından sonra yaranmış $E_m, m = 1, \dots, S$ alt fəzaları daxilindəki vəziyyətlərin stasionar ehtimalları $\rho(n)$ və $\rho_0(n)$ $M/M/1$ və $M/M/\infty$ modellərinin stasionar ehtimalları ilə üst-üstə düşür və uyğun olaraq (2.1.24) və (2.1.25) düsturları ilə hesablanır.

İriləşmiş vəziyyətlərin $\pi(\langle m \rangle)$ ehtimalları isə (2.1.38) düsturları ilə hesablanır, lakin burada $\Lambda(m_1)$ aşağıdakı qaydada müəyyən olunur:

$$\Lambda(m_1) = m_1 \gamma (1 - a) + a (\mu_2 \sigma_2 + (m_1 - 1) \gamma), m_1 = 1, \dots, S \quad (2.1.42)$$

Öncə qeyd olunduğu kimi, $RL_b = 0$. Digər QoS-lar isə aşağıdakı düsturlarla hesablanır:

$$\left. \begin{aligned}
S_{av} &\approx \sum_{m=1}^S m \pi(\langle m \rangle) \\
\Gamma_{av} &\approx \gamma \left[\sum_{m=1}^S \pi(\langle m \rangle) (m - a) \right] \\
RR &\approx \sum_{m=1}^S (m\gamma(1 - a))\pi(\langle m \rangle) + (1 - (1 - a)\pi(\langle m \rangle))((m - 1)\gamma + \mu_2\sigma_2) \\
RL_r &\approx \tau b \pi(\langle 0 \rangle) \\
L_{av} &\approx b \pi(\langle 0 \rangle) + \frac{a}{1 - a} (1 - \pi(\langle 0 \rangle))
\end{aligned} \right\} \quad (2.1.43)$$

MS/(S-1, S) modelinin analizi və əldə olunmuş nəticələr haqqında daha ətraflı məlumatı [63] məqaləsindən əldə etmək olar.

Beləliklə, MS/(s, S), MS/(m, S) və MS/(S-1, S) modelləri üçün stasionar ehtimalları və keyfiyyət göstəricilərini hesabladıqdan sonra növbəti paragrafda ədədi eksperimentlərin nəticələri nümayiş olunacaq. Qeyd edək ki, alınmış düsturlar optimallaşdırma məsələlərinin həlli zamanı istifadə ediləcək.

2.2. Ədədi eksperimentlər

Bu paragrafda ədədi eksperimentlərin nəticələri, təqribi alqoritmlərin dəqiqliyi, QoS-ların sistem parametrlərindən asılılığı və optimallaşdırma məsələləri analiz olunacaq.

2.2.1. Təqribi alqoritmin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi

Təqribi alqoritmin dəqiqliyini qiymətləndirmək məqsədilə MS/(s, S) modelinin sonlu növbəli ($N < \infty$) halı üçün fəza iriləşdirilməsi alqoritminin nəticələri dəqiq üsulla müqayisə olunmuşdur. Müqayisə zamanı $\|N\|_1$ - maksimum mütləq fərq, $\|N\|_2$ - Jaccard oxşarlığı və $\|N\|_3$ - cosinus normalarından istifadə edilmişdir.

Eksperimentlər zamanı parametrlər üçün aşağıdakı qiymətlər istifadə edilmişdir:

$$\mu_1 = 15, \mu_2 = 3, \gamma = 2, \nu = 1, \tau = 0.5, \sigma_1 = 0.3, \phi_1 = 0.6 \quad (2.2.1)$$

Stasionar ehtimalların və QoS-lar (2.1.9), (2.1.10), (2.1.20) və (2.1.22) düsturları ilə hesablanmışdır.

Sistem parametrlərinin qiymətlərinin seçilməsi zamanı fəza iriləşdirilməsi alqoritminin dəqiqliyini artırmaq məqsədilə $\lambda \gg \max\{\gamma, \nu\}$ şərtinin ödənməsi də nəzərə alınmışdır. Yuxarıdakı parametrləri sabit saxlamaqla anbar ehtiyatının maksimal həcmi S , kritik hədd s , daxilolma intensivliyi λ və növbənin maksimal uzunluğu N kəmiyyətlərinin kiçik və böyük qiymətlərində qeyd olunan normalar hesablanmışdır. Dəqiq nəticələr isə keçid matrisinə uyğun balans tənliklərinin həll edilməsi vasitəsilə alınmışdır.

Ədədi eksperimentlər Python SciPy kitabxanalarından istifadə etməklə yaradılmış proqram təminatı vasitəsilə aparılmış və nəticələr Cədvəl 2.2.1-də təqdim olunmuşdur.

Cədvəl 2.2.1 MS/(s, S) modelində stasionar ehtimalların dəqiqliyi

Parametrlərin qiymətləri				Normalar		
s	S	N	λ	$\ N\ _1$	$\ N\ _2$	$\ N\ _3$
1	10	10	40	0.012387	0.999152	0.924913
		10	60	0.008772	0.999626	0.948815
		30	40	0.006512	0.998581	0.918092
		30	60	0.00435	0.999611	0.951011
		50	60	0.004831	0.99875	0.926706
		70	60	0.008485	0.988533	0.820533
6	20	10	20	0.012668	0.995689	0.841564
		10	40	0.00796	0.999029	0.915987
		10	60	0.005631	0.999577	0.942885
		30	40	0.004257	0.998506	0.911695
		30	60	0.002826	0.999538	0.944291
		50	40	0.005832	0.985151	0.80792
		50	60	0.002826	0.998905	0.928744
		70	60	0.00403	0.992309	0.859102
11	30	10	20	0.010171	0.995462	0.835242
		10	40	0.00639	0.998987	0.91286
		10	60	0.004521	0.99956	0.940802
		30	40	0.003417	0.998503	0.909424
		30	60	0.002268	0.999518	0.941928
		50	40	0.004682	0.987063	0.825411
		50	60	0.002268	0.998962	0.929457
		70	60	0.003235	0.993323	0.87311
16	40	10	20	0.00875	0.995336	0.831666
		10	40	0.005497	0.998962	0.911085
		10	60	0.003889	0.99955	0.939618
		30	40	0.00294	0.998504	0.908135
		30	60	0.001951	0.999507	0.940586
		50	40	0.004027	0.988068	0.835512

		50	60	0.001951	0.998995	0.929864
		70	60	0.002783	0.993855	0.881173
21	50	10	20	0.007799	0.995252	0.829281
		10	40	0.004899	0.998946	0.9099
		10	60	0.003466	0.999543	0.938827
		30	40	0.00262	0.998505	0.907273
		30	60	0.001739	0.9995	0.939689
		50	40	0.00359	0.988716	0.842335
		50	60	0.001739	0.999016	0.930135
		70	60	0.00248	0.994197	0.886607

Cədvəl 2.2.1-dən görünür ki, fəza iriləşdirilməsi alqoritmin dəqiqliyi olduqca yüksəkdir. Belə ki, daxilolma intensivliyinin böyük qiymətlərində $\|N\|_1$ norması sıfıra, digər normalar isə vahidə yaxınlaşır ki, bu da dəqiqliyin daha da artması deməkdir. Bu onunla izah olunur ki, daxilolma intensivliyi λ artıqca $E_m, m = 1, \dots, S$ alt fəzaları arasındakı keçidlərin intensivliyi azalır. Bu isə fəza iriləşdirilməsi alqoritminin korrekt tətbiq oluna bilməsi üçün əsas şərtidir.

Sistemin anbar prosesləri ilə əlaqəli QoS göstəricilərinin qiymətlərinin müqayisəli analizi Cədvəl 2.2.2-də təqdim olunmuşdur.

Cədvəl 2.2.2 MS/(s, S) modelində anbar ilə əlaqəli QoS-ların dəqiqliyi

Parametrlərin qiymətləri				S_{av}		Γ_{av}		RR	
s	S	N	λ	Dəqiq	Təqribi	Dəqiq	Təqribi	Dəqiq	Təqribi
1	10	[28,120]	[28,60]	2.44750	2.44750	3.58944	3.58944	0.5125	0.5125
6	20	[28,120]	[28,60]	5.69590	5.69590	9.83734	9.83734	0.6364	0.6364
11	30	[28,120]	[28,60]	8.82642	8.82642	16.0104	16.0104	0.6728	0.6728
16	40	[28,120]	[28,60]	11.9370	11.9370	22.1818	22.1818	0.6906	0.6906
21	50	[28,120]	[28,60]	15.0406	15.0406	28.3555	28.3555	0.7011	0.7011

Cədvəl 2.2.2-dən görüldüyü kimi S və s parametrlərinin qiymətlərindən asılı olmayaraq anbar ehtiyatlarının orta səviyyəsi (S_{av}), ehtiyatların orta xarab olma intensivliyi (Γ_{av}), EA tələblərinin orta intensivliyi (RR) həm dəqiq, həm də təqribi üsullarla hesablandıqda eyni nəticələr alınır. Nəticələrin dəqiqliyi sistem parametrlərinin böyük qiymətlərində də saxlanılır ki, bu da praktiki baxımdan əhəmiyyətlidir. Əlavə olaraq, ədədi eksperimentlər zamanı məlum olmuşdur ki, anbar ehtiyatı ilə əlaqəli QoS göstəriciləri daxilolma intensivliyindən və növbənin

uzunluğundan asılı deyil. Bu səbəbdən, **Cədvəl 2.2.2**-də yalnız S və s parametrlərinə əsasən müqayisənin nəticələri təqdim olunmuşdur.

$MS/(s, S)$ modeli üçün sorğulara xidmət prosesləri ilə əlaqəli olan QoS göstəriciləri üçün müqayisənin nəticələri cədvəl Cədvəl 2.2.3-də nümayiş etdirilmişdir.

Cədvəl 2.2.3 $MS/(s, S)$ modeli sorğulara xidmətlə əlaqəli QoS-ların dəqiqliyi

Parametrlərin qiymətləri				PL		L_{av}	
s	S	N	λ	Dəqiq	Təqribi	Dəqiq	Təqribi
1	10	10	20	0.730948	0.795257	9.460112	9.605524
		10	40	0.858358	0.89121	9.778314	9.831357
		10	60	0.903661	0.925821	9.860933	9.893048
		30	40	0.820976	0.855539	29.423218	29.450475
		30	60	0.871208	0.893204	29.687109	29.7167
		50	60	0.852899	0.877279	49.326578	49.309521
6	20	10	20	0.70913	0.787996	9.476948	9.642856
		10	40	0.849987	0.88988	9.78693	9.846369
		10	60	0.898765	0.925527	9.866474	9.902321
		30	40	0.826006	0.866995	29.559085	29.602006
		30	60	0.877944	0.904601	29.75495	29.789181
		50	60	0.866198	0.894383	49.523637	49.527946
11	30	10	20	0.701413	0.785433	9.482975	9.656036
		10	40	0.847031	0.889411	9.78998	9.851669
		10	60	0.897036	0.925423	9.868433	9.905595
		30	20	0.673959	0.774041	28.740021	28.516447
		30	40	0.82778	0.87104	29.607078	29.655506
		30	60	0.880322	0.908624	29.778907	29.814772
		50	60	0.870893	0.900422	49.59322	49.605065
16	40	10	20	0.697023	0.783975	9.486405	9.663533
		10	40	0.84535	0.889144	9.791715	9.854684
		10	60	0.896053	0.925364	9.869547	9.907457
		30	20	0.673397	0.774175	28.847506	28.683217
		30	40	0.828789	0.87334	29.634376	29.685937
		30	60	0.881675	0.910913	29.792533	29.829328
		50	40	0.819089	0.86972	49.183994	48.969713
		50	60	0.873563	0.903857	49.632799	49.64893
		70	60	0.867787	0.901657	69.255649	69.066312
21	50	10	20	0.694085	0.782999	9.4887	9.668551
		10	40	0.844224	0.888965	9.792877	9.856701
		10	60	0.895395	0.925324	9.870293	9.908703
		30	20	0.673024	0.774265	28.919349	28.794821
		30	40	0.829464	0.87488	29.652644	29.706302
		30	60	0.88258	0.912445	29.801653	29.839069
		50	40	0.820819	0.871653	49.251232	49.067951
		50	60	0.87535	0.906156	49.659285	49.678285
		70	60	0.870202	0.904195	69.323142	69.159014

Cədvəl 2.2.3-dən göründüyü kimi növbənin orta uzunluğu (L_{av}) və sorğuların itmə ehtimalı (PL) üçün kifayət qədər dəqiq nəticələr alınmışdır. Yalnız itmə ehtimalı (PL) üçün təxminən 3% fərq var ki, bu da praktiki baxımdan qəbul oluna bilən xətdir.

MS/(S-1, S) modeli üçün də aparılan ədədi eksperimentlərdən anbar prosesləri ilə əlaqəli QoS-lar və stasionar ehtimallar üçün oxşar nəticələr əldə olunmuşdur. MS/(S-1, S) modeli üçün əldə olunan nəticələr [63, s.90-94] məqaləsində ətraflı təqdim edilmişdir. Sorğulara xidmətlə əlaqəli QoS-ların müqayisəsi isə Cədvəl 2.2.4-də təqdim olunmuşdur.

Cədvəl 2.2.4 MS/(S-1, S) modeli sorğulara xidmətlə bağlı QoS-ların dəqiqliyi

Parametrlər			RL_b		RL_r		L_{av}	
S	N	λ	Dəqiq	Təqribi	Dəqiq	Təqribi	Dəqiq	Təqribi
10	10	60	53.434375	55.491991	0.090831	0.093377	9.873783	9.917505
	30	40	33.251864	35.313561	0.273342	0.271806	29.782387	29.850142
		60	53.248114	55.307103	0.277091	0.278264	29.864775	29.907871
	50	40	33.069064	35.168018	0.456141	0.417349	49.75709	49.761818
		60	53.063085	55.128522	0.462121	0.456846	49.851439	49.885624
70	60	52.87945	54.974741	0.645755	0.610626	69.832213	69.813776	
20	10	60	53.400653	55.499856	0.001592	0.001674	9.876329	9.918894
	30	40	33.397364	35.496658	0.004881	0.004873	29.802009	29.872825
		60	53.3973	55.496542	0.004944	0.004989	29.876169	29.918721
	50	40	33.394035	35.494048	0.00821	0.007482	49.801639	49.871242
		60	53.393956	55.49334	0.008288	0.00819	49.875961	49.918322
	70	40	33.390713	35.493373	0.011532	0.008158	69.80117	69.865791
		60	53.39062	55.490583	0.011625	0.010947	69.875698	69.917034
	90	40	33.387395	35.493368	0.01485	0.008162	89.800598	89.858999
		60	53.38729	55.489352	0.014954	0.012178	89.875373	89.912694
	110	40	33.38408	35.493368	0.018164	0.008162	109.79992	109.8522
60		53.383966	55.489287	0.018278	0.012243	109.87498	109.90602	
30	10	60	53.400012	55.499997	0.000028	0.00003	9.876403	9.918918
	30	60	53.399953	55.499939	0.000087	0.000088	29.8764	29.918915
	50	40	33.399895	35.499895	0.000145	0.000132	49.802382	49.873204
		60	53.399893	55.499882	0.000146	0.000145	49.876396	49.918908
	70	40	33.399835	35.499883	0.000204	0.000144	69.802374	69.873108
		60	53.399834	55.499833	0.000206	0.000194	69.876392	69.918886
		60	53.399775	55.499812	0.000265	0.000215	89.876387	89.918809
	110	40	33.399717	35.499883	0.000323	0.000144	109.80236	109.87287
		60	53.399715	55.49981	0.000324	0.000217	109.87638	109.91869
	40	10	60	53.4	55.5	0	0.000001	9.876404
30		60	53.399999	55.499999	0.000002	0.000002	29.876404	29.918919

	50	60	53.399998	55.499998	0.000003	0.000003	49.876404	49.918919
	70	60	53.399997	55.499997	0.000004	0.000003	69.876404	69.918918
	90	60	53.399996	55.499997	0.000005	0.000004	89.876404	89.918917
	110	60	53.399995	55.499997	0.000006	0.000004	109.8764	109.91892
	120	40	33.399994	35.499998	0.000006	0.000003	119.80239	119.87323
		60	53.399994	55.499997	0.000006	0.000004	119.8764	119.91891

Cədvəl 2.2.4-dən göründüyü kimi S və N parametrlərinin yüksək qiymətlərində çox dəqiq nəticələr alınmışdır. Əlavə olaraq, S və N parametrlərinin yüksək qiymətlərində RL_r kəmiyyətinin azalmasının şahidi oluruq. Bu onunla izah olunur ki, növbənin uzunluğu artdıqca daxil olan sorğulara növbəyə qoşulmağa daha çox yer olur və anbar həcmnin artması isə anbar ehtiyatının sıfır olması ehtimalını azaldır. Anbarın həcmnin çox böyük qiymətlərində isə səbirsizlik səbəbindən sorğuların sistemi tərk etməsi intensivliyi RL_r , demək olar, sıfıra bərabər olur. Digər tərəfdən isə növbənin orta uzunluğu (L_{av}) artır. Həmçinin Cədvəl 2.2.4-də λ daxilolma intensivliyinin böyük qiymətlərində RL_b kəmiyyətinin artmasını müşahidə edirik ki, bu da serverin xidmət yükünün artması nəticəsində növbənin sürətlə böyüməsi ilə izah olunur.

Beləliklə, sonlu növbəli hal üçün $MS/(s, S)$ və $MS/(S-1, S)$ modellərinin stasionar ehtimallarının və keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması dəqiqliyi qiymətləndirildi və fəza iriləşdirilməsi alqoritminin yüksək dəqiqliyi eksperimental qaydada isbat olundu. Sonlu növbəli hal üçün alınan nəticələr haqqında daha ətraflı məlumatı [62, s.51-59, 63, s.90-94] məqalələrindən əldə etmək mümkündür.

İndi isə $MS/(S-1, S)$ modelinin **sonsuz növbəli** $N = \infty$ halı üçün ədədi eksperimentlərin nəticələrini təhlil edək. Sonsuz halda stasionar ehtimalları hesablamaq üçün dəqiq üsul olmadığından fəza iriləşdirilməsi alqoritminin nəticələri simulyasiya üsulu ilə alınmış nəticələrlə müqayisə olunmuşdur. Eksperiment zamanı modelin simulyasiyası üçün isə Gillespie direct metodundan istifadə edilmişdir.

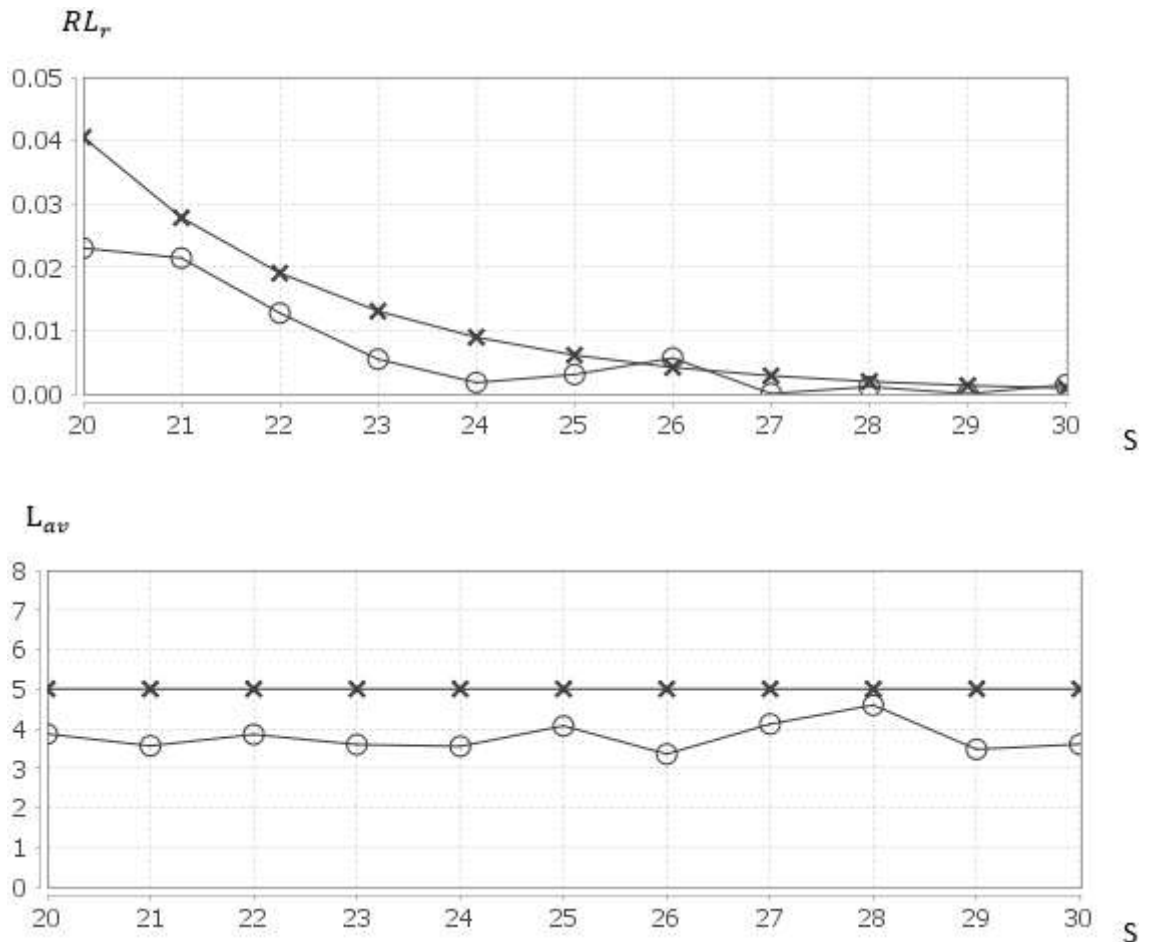
Eksperiment zamanı sistem parametrləri aşağıdakı qaydada müəyyən olunmuşdur:

$$\lambda = 10, \mu_1 = 40, \mu_2 = 10, \gamma = 4, \nu = 2, \tau = 6, \sigma_1 = 0.3, \phi_1 = 0.6 \quad (2.2.2)$$

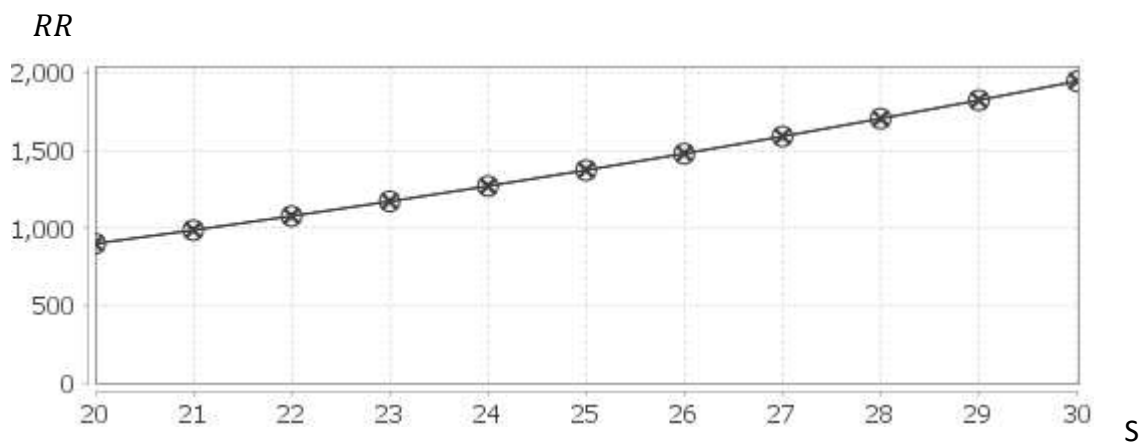
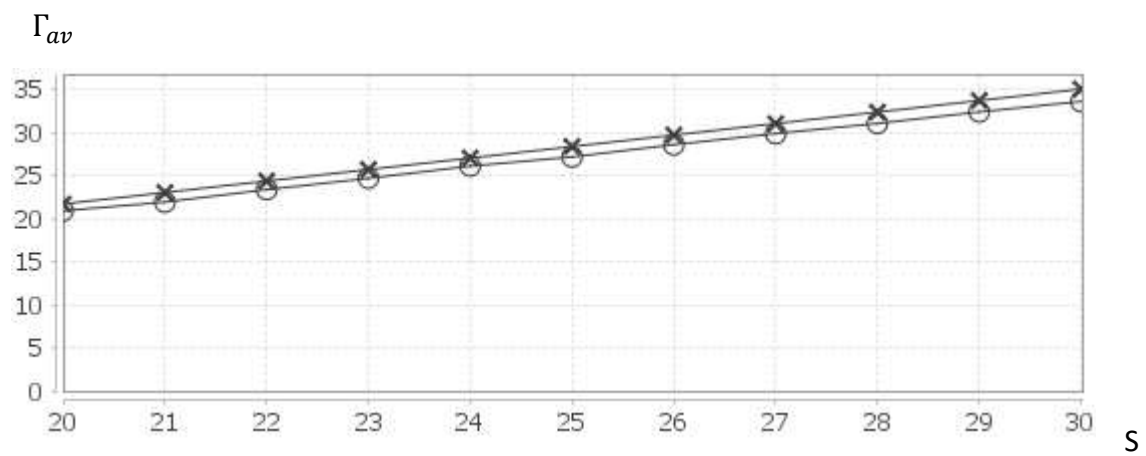
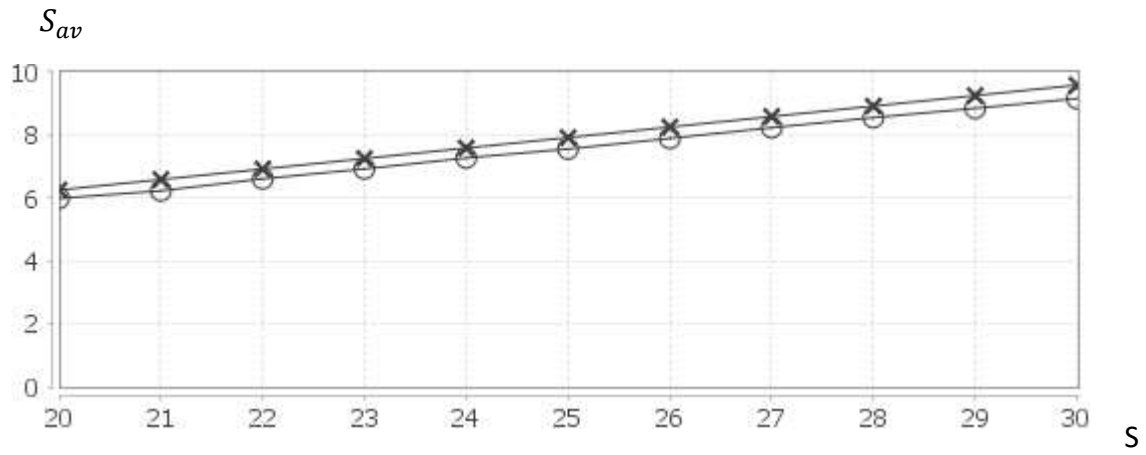
Eksperiment zamanı system parametrlərinin qiymətləri elə seçilmişdir ki, erqodiklik şərti $\frac{\lambda}{\mu_1 \sigma_1} < 1$ ödənsin və əlavə olaraq, fəza iriləşdirilməsi alqoritminin

səmərəliliyini artırmaq məqsədilə (2.1.6) $E_m, m = 1, \dots, S$ alt fəzaları arasındakı keçidlərin intensivliyi minimal olsun.

Müqayisənin nəticələri Qrafik 2.2.1 və Qrafik 2.2.2-də təqdim olunmuşdur. Verilən qrafiklərdə “o” simulyasiya, “x” isə təqribi nəticələri işarələmək üçün istifadə olunmuşdur. Qrafiklərdən aydın olur ki, $S_{av}, \Gamma_{av}, RR, RL_r$ QoS göstəricilərinin dəqiq və təqribi qiymətləri, demək olar ki, üst-üstə düşür. Bununla belə, L_{av} keyfiyyət göstəricisi üçün kiçik fərqlər mövcuddur. Qeyd edək ki, S parametrinin böyük qiymətlərində fəza iriləşməsi alqoritminin dəqiqliyi daha yüksək olur. Bu fakt fəza iriləşdirilməsi alqoritmini böyük ölçülü modellərə tətbiq etməyə imkan yaradır ki, bu da praktiki nöqteyi nəzərdən olduqca əhəmiyyətlidir.



Qrafik 2.2.1 Sorğulara xidmətlə əlaqəli keyfiyyət göstəricilərinin dəqiqliyinin $MS/(S-1, S)$ sonsuz növbəli modeli üçün müqayisəsi



Qrafik 2.2.2 MS/(S-1, S) $N = \infty$ modeli üçün anbar prosesləri ilə əlaqəli QoS göstəricilərin dəqiqliyi

Aparılan eksperimentlərlə bağlı nəticələr [62, s.51-59, 63, s.90-94] məqalələrində təqdim olunmuşdur.

Beləliklə, fəza iriləşdirilməsi alqoritminin dəqiqliyini və praktiki effektivliyini müxtəlif EA qaydalarının tətbiq altında, sonlu və sonsuz modellər üçün ekperimental qaydada isbat etmiş olduq.

2.2.2. Fəza iriləşdirilməsi alqoritminin səmərəliliyi

Aparılan ədədi eksperimentlərdə sonlu modellər üçün stasionar ehtimalların dəqiq qiymətlərinin balans tənliklərindən hesablanması qeyd olunmuşdur. Balans tənliklərinin hesablanması alqoritmlərinin mürəkkəbliyi $O(n^3)$ -ə bərabərdir. Bu o deməkdir ki, S və N parametrlərinin artması ilə resurslara və vaxta olan tələbat eksponensial qaydada artır. Məsələn, $S = 100$ və $N = 100$ olduqda CPU Core i7 2.40 Ghz and 8GB RAM resurslu kompüterdə stasionar ehtimalların və QoS-ların hesablanması üçün, təxminən, 3-4 saat vaxt tələb olunmuşdur. Bununla belə, eyni parametrlər üçün stasionar ehtimalların və keyfiyyət göstəricilərinin təqribi alqoritmlə hesablanması 3-4 saniyəyə başa gəlmişdir [62, s.52]. Bu cür nəticələr iri ölçülü modellərin praktiki analizi üçün fəza iriləşdirilməsi alqoritminin səmərəli və sürətli seçim olmasını bir daha sübut edir.

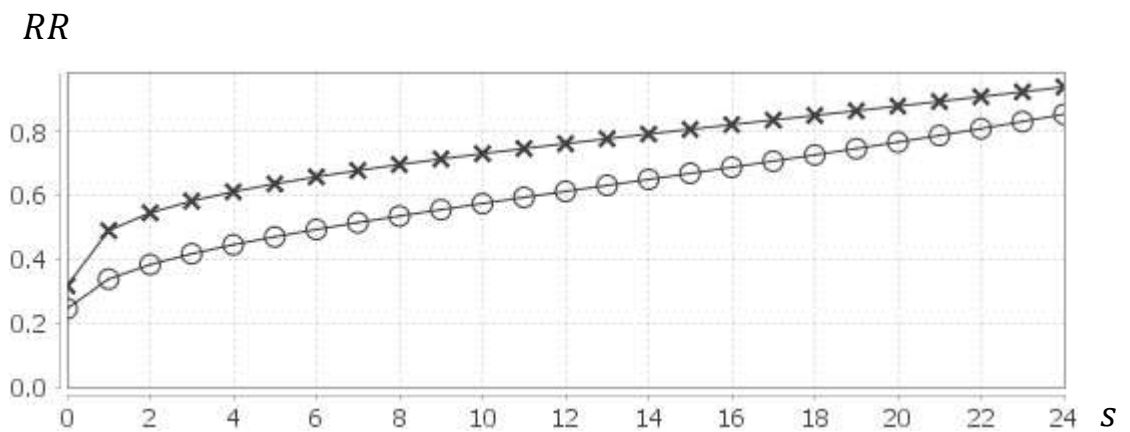
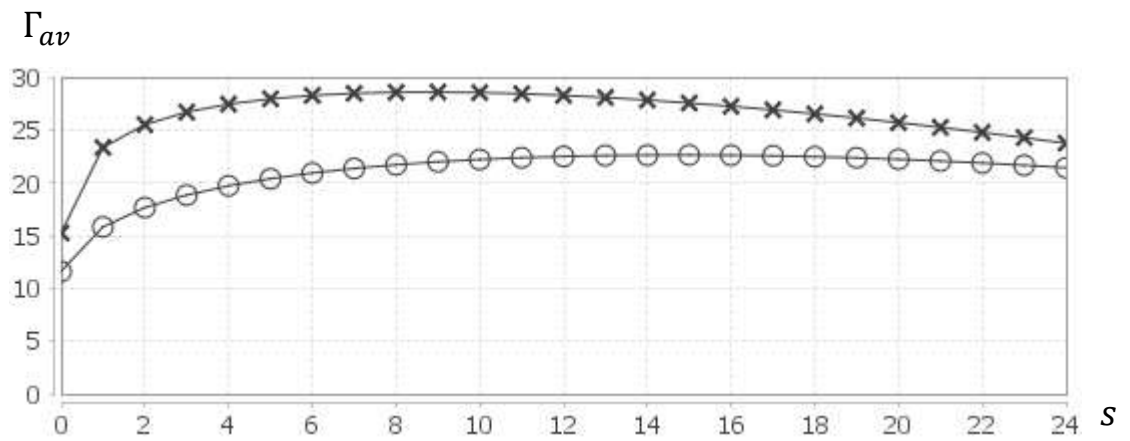
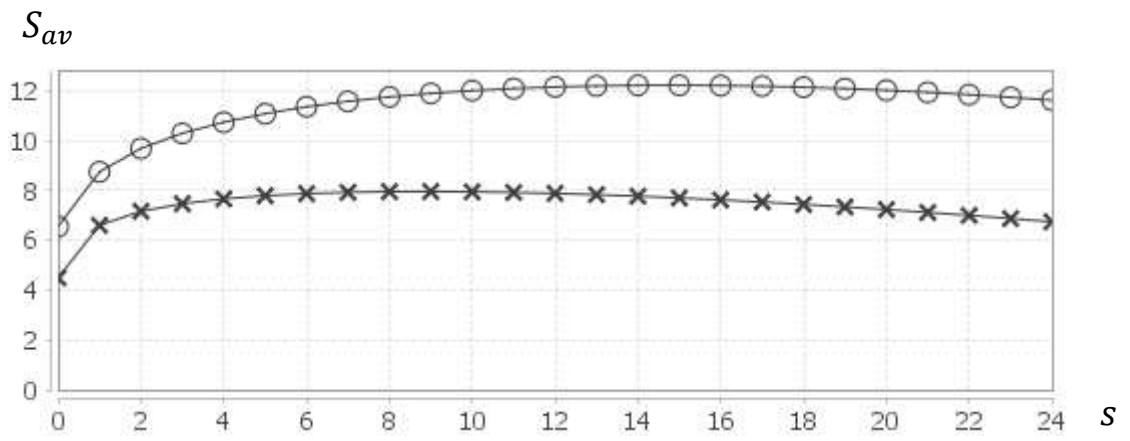
2.2.3. Keyfiyyət göstəricilərinin analizi

Burada $MS/(s, S)$ modeli üçün keyfiyyət göstəricilərinin kritik həddən asılılığı, daha sonra isə $MS/(s, S)$ və $MS/(m, S)$ modelləri üçün müqayisənin nəticələri təhlil olunacaq.

MS/(s, S) modeli üçün QoS göstəricilərin EA həddindən asılılığı Qrafik 2.2.3 və Qrafik 2.2.4-də təqdim olunmuşdur. Ədədi eksperimentlər zamanı sistem parametrləri aşağıdakı qaydada seçilmişdir:

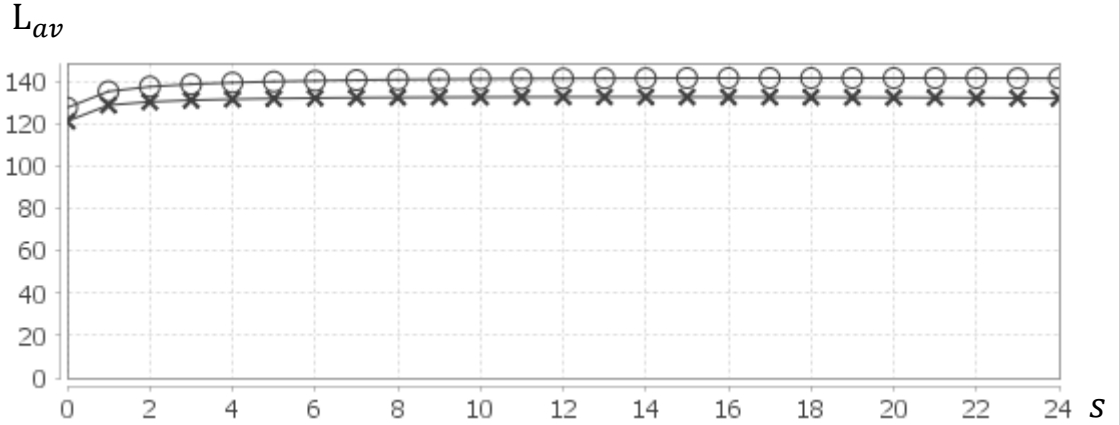
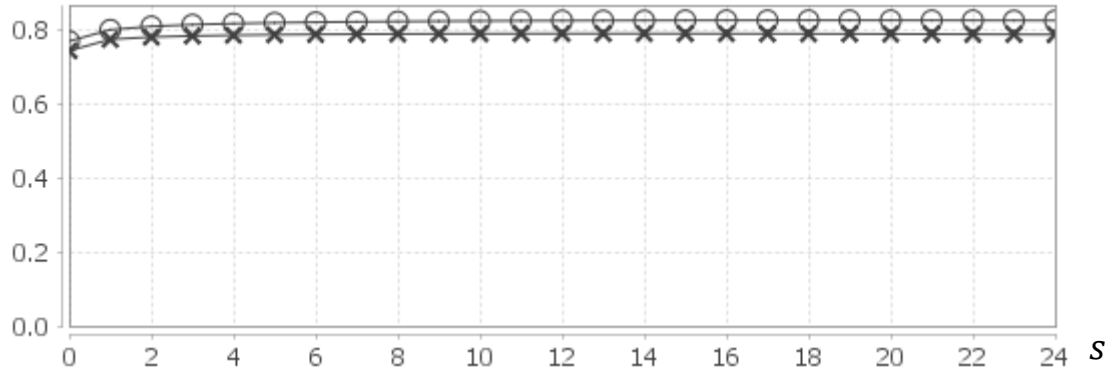
$$\mu_1 = 6, \mu_2 = 3, \gamma = 2, \nu = 1, \tau = 0.5, \sigma_1 = 0.7, S = 40, N = 150, \lambda = 30 \quad (2.2.3)$$

Əlavə olaraq, ədədi eksperimentlər xarab olma intensivliyinin $\gamma = 2$ və $\gamma = 4$ qiymətləri üçün aparılmış və nəticələr uyğun olaraq, o və x ilə işarələnən əyrilərlə təsvir olunmuşdur.



Qrafik 2.2.3 Anbar prosesləri ilə əlaqəli QoS göstəricilərinin EA həddindən asılılığı

PL



Qrafik 2.2.4 Sorğular xidmətlə əlaqəli QoS göstəricilərinin EA həddindən asılılığı

Qrafik 2.2.3-də anbar prosesləri ilə əlaqəli QoS göstəricilərin davranışı təsvir edilmişdir. Qrafiklərdən görüldüyü kimi anbardakı ehtiyatların orta səviyyəsi olan S_{av} əvvəlcə artır, sonra isə aram sürətlə azalmağa başlayır. Eyni zamanda, xarabolma intensivliyinin kiçik qiymətində, uyğun olaraq, S_{av} kəmiyyəti böyük qiymətlər alır, yəni, S_{av} və γ tərs mütənasib kəmiyyətlərdir. Sonuncu fakt onunla izah edilir ki, xarabolma intensivliyinin kiçik qiymətlərində ehtiyatların ömrü daha çox olduğundan anbardakı ehtiyatların orta səviyyəsi də artır. Anbarın orta xarabolma intensivliyi olan Γ_{av} kəmiyyəti üçün isə intuitiv olaraq $\Gamma_{av} \approx \gamma S_{av}$ münasibəti ödəyir. Əlavə olaraq, bu münasibətin dəqiqliyi s parametrinin artması ilə artır. RR anbar tələbinin yerləşdirilmə intensivliyi də s parametri ilə düz mütənasibdir və təbii olaraq, xarabolma intensivliyinin daha böyük qiymətində daha yüksək olur.

Sorğulara xidmətlə əlaqəli keyfiyyət göstəricilərinin Qrafik 2.2.4-də davranışı təsvir olunub. Sorğuların itməsi ehtimalı PL s parametrinin artması ilə çox kiçik sürətlə

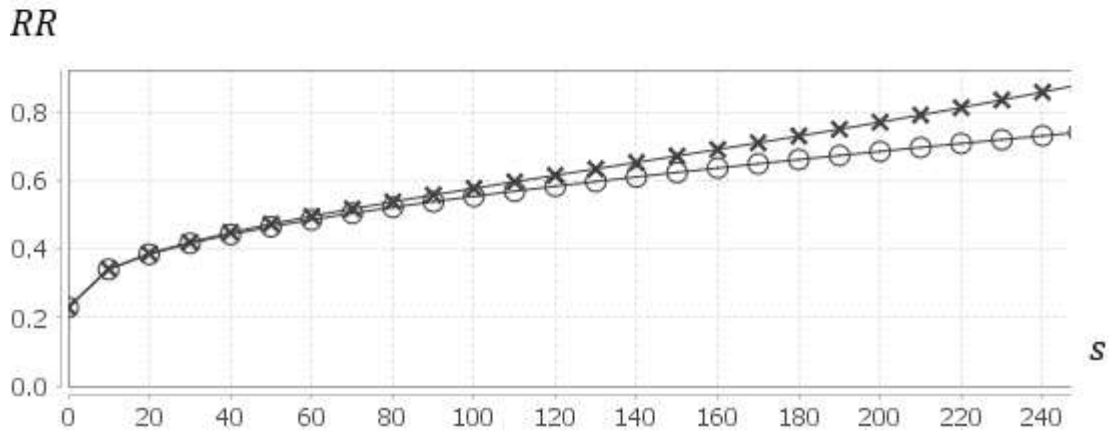
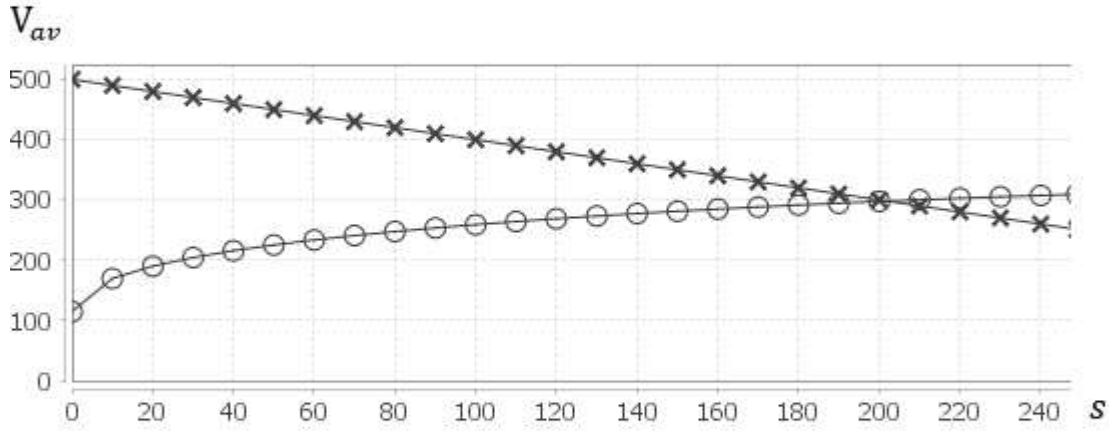
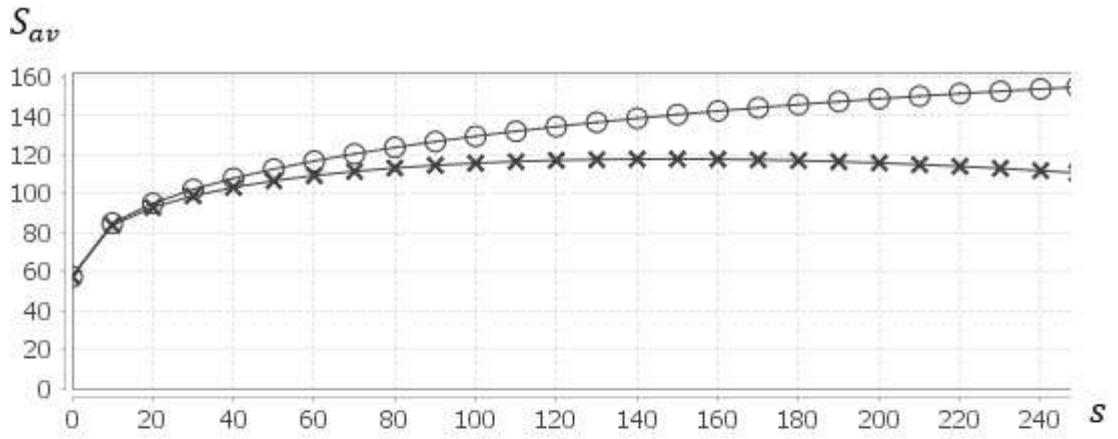
artır və sonradan stabilləşir. Digər tərəfdən, PL xarabolma intensivliyi ilə tərs mütənasibdir. Növbənin orta uzunluğu L_{av} kəmiyyəti üçün də oxşar nəticələr alınmışdır. Bu onunla izah olunur ki, s parametrinin artması ilə anbar ehtiyatının orta səviyyəsi də artır (bax, Qrafik 2.2.3) və sorğuların səbirsizlik səbəbindən sistemi tərk etmə ehtimalı azalır. Növbənin orta uzunluğunun artması isə onun dolması ehtimalını və sorğuların dolma səbəbindən itməsi ehtimalını yüksəldir.

$MS/(s, S)$ və $MS/(m, S)$ modellərinin keyfiyyət göstəricilərinin EA qaydalarına nəzərən müqayisəli analizi Qrafik 2.2.5 və Qrafik 2.2.6-da verilmişdir. Bu şəkillərdə sonlu növbəli hala baxılır və sistem paramterləri aşağıdakı kimi qəbul olunmuşdur:

$$\lambda = 10, \mu_1 = 15, \mu_2 = 3, \sigma_1 = 0.3, \phi_1 = 0.6, \tau = 0.5, \gamma = 2, \nu = 1 \quad (2.2.4)$$

Əlavə olaraq, ədədi eksperimentlər zamanı $S = 500, N = 800$ kimi qəbul edilir. Bu isə öz növbəsində $501 * 801$ ölçülü keçid matrisi yaradır ki, stasionar ehtimalların dəqiq üsulla hesablanması praktiki çox çətindir. Bu səbəbdən, ədədi eksperimentlər zamanı QoS-ların hesablanmasında fəza iriləşdirilməsi alqoritmindən istifadə olunmuşdur. Təqdim olunan bütün qrafiklərdə o və x uyğun olaraq $MS/(m, S)$ və $MS/(s, S)$ modelləri üçün s kritik həddən asılılıq əyrisini təsvir edir.

Anbar ehtiyatı ilə əlaqəli keyfiyyət göstəricilərinin analizi şəkil Qrafik 2.2.5-də təsvir edilmişdir. Şəkildən görüldüyü kimi s kəmiyyəti artıqdca orta anbar ehtiyatı S_{av} də artır, lakin (s, S) (x əyrisi) EA qaydası tətbiq olunan modeldə sonradan aramla kiçilməyə, $(s, S - m)$ (o əyrisi) modelində isə sürətlə böyüməyə başlayır. Eyni zamanda, $s \leq 50$ qiymətlərində əyriilər üst-üstə düşsə də, s -in böyük qiymətlərində $MS/(m, S)$ modeli üçün göstərici daha yüksəkdir və $s > 240$ aralığında fərq 30%-ə qədər yüksəlir. Buna səbəb, $(s, S - m)$ dəyişən ölçülü EA qaydasında EA tələbinin həcmnin cari anbar ehtiyatının səviyyəsindən asılılığı və sabit (s, S) EA tələbinin həcmindən çox vaxt böyük olmasıdır.



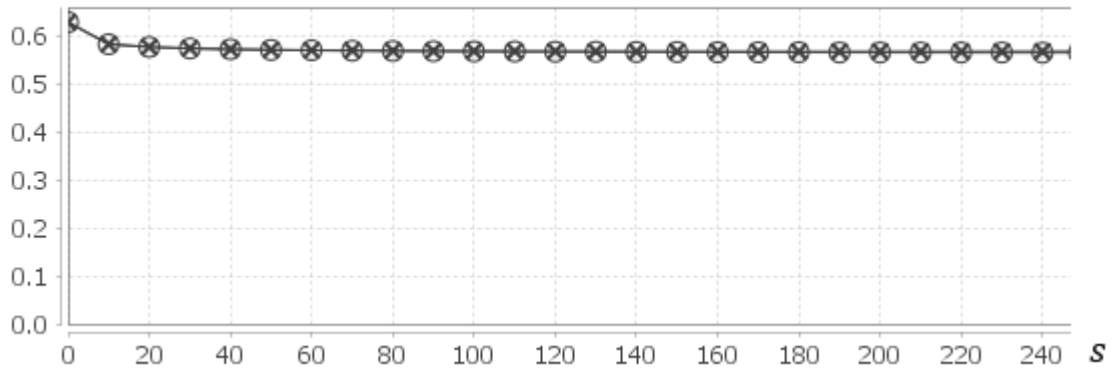
Qrafik 2.2.5 Anbar prosesləri ilə əlaqəli QoS göstəricilərinin (s,S) və (s,S-m) qaydalarına nəzərən EA həddindən asılılığı

V_{av} kəmiyyəti $MS/(s, S)$ modeli üçün (0,500) və (250,250) nöqtələrini birləşdirən parça ilə təsvir olunur. Buna səbəb, $MS/(s, S)$ modelində EA tələbinin həcmnin sabit $(S - s)$ kəmiyyətinə bərabər olmasıdır. $MS/(m, S)$ modelinə uyğun qrafik s -ə nəzərən artan funksiya olub $s \leq 200$ aralığında $MS/(s, S)$ modelinə nəzərən kiçik, $s > 200$ aralığında isə böyük qiymətlər alır.

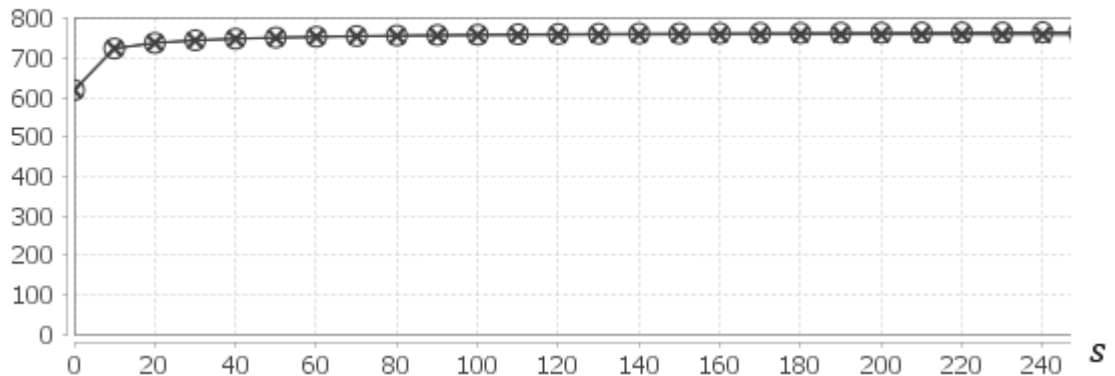
RR xarakteristikası hər iki EA qaydası üçün s -ə nəzərən artan funksiyadır. Eyni zamanda, Qrafik 2.2.5-dən görüldüyü kimi (s, S) modeli üçün EA tələbinin yerləşdirilmə intensivliyi s kəmiyyətinin böyük qiymətlərində artır. Buna səbəb, (s, S) qaydasında EA tələbinin orta həcmnin $(s, S - m)$ qaydasına nəzərən kiçik olmasıdır.

Sorğulara xidmətlə əlaqəli QoS-ların müqayisəsi Qrafik 2.2.6-da təsvir olunmuşdur.

PL



L_{av}



Qrafik 2.2.6 Sorğularla əlaqəli keyfiyyət göstəricilərinin (s, S) və $(s, S - m)$ qaydalarına nəzərən EA həddindən asılılığı

Qrafik 2.2.6-dan görüldüyü kimi sorğuların itmə ehtimalı PL s parametrindən, demək olar, asılı deyil, yalnız s -in kiçik qiymətlərində az artır və sonradan stabilləşir. Növbənin orta uzunluğu L_{av} oxşar nəticələr göstərir və böyük qiymətlər alır, belə ki, $s = 250$ qiymətində L_{av} təqribən 800-ə bərabər olur. Əlavə olaraq, qrafiklərdən alınır ki, sorğulara xidmətlə əlaqəli keyfiyyət göstəriciləri EA qaydası seçimindən asılı deyil. Bu onunla izah olunur ki, ədədi eksperimentlər zamanı parametrlər ele seçilmişdir ki, sorğular inadkardır, yəni, anbar ehtiyatı olmadıqda belə növbəyə qoşulma ehtimalı

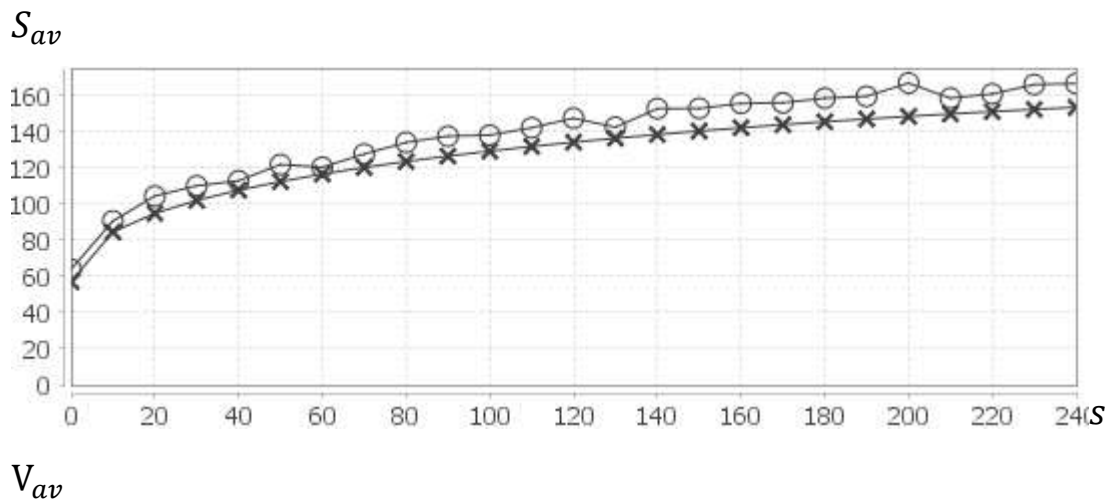
yüksək və səbirsizlik intensivliyi isə aşağıdır. Bu şərtlər daxilində isə növbənin uzunluğu L_{av} və sorğuların itməsi ehtimalı PL yalnız sorğuların daxilolma və xidmət intensivliklərindən asılı olur.

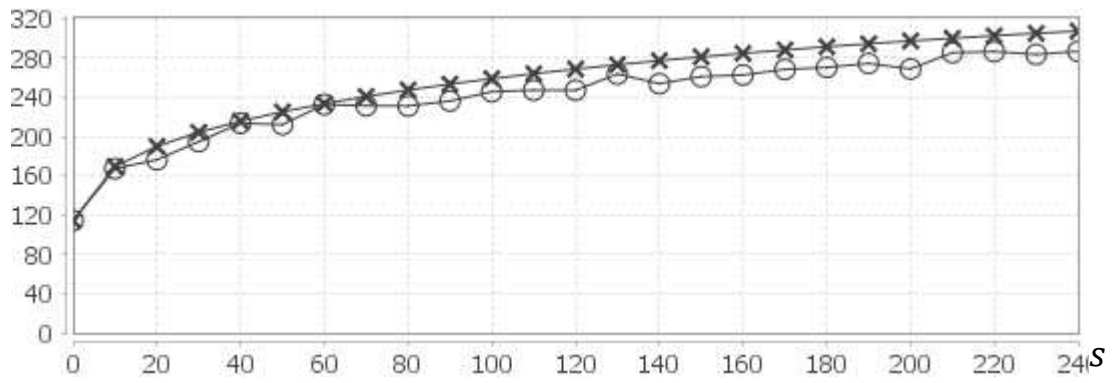
Müqayisəli analizin nəticələrindən belə qənaətə gəlmək olar ki, ehtiyatların saxlanması və saxlanma xərclərinin azaldılması baxımından $MS/(s, S)$ modeli daha üstün seçimdir. Bununla belə, (s, S) EA qaydası üçün EA tələbinin yerləşdirilmə intensivliyi $RR (s, S - m)$ EA qaydasına nəzərən daha böyük qiymətlər alır. Bu o deməkdir ki, optimal EA qaydasının seçilməsi sistemin parametrlərindən asılıdır və bu məqsəd üçün universal üsul mövcud deyil.

Əlavə olaraq, əldə edilmiş nəticələr fəza iriləşdirilməsi alqoritminin dəqiqliyini bir daha isbat edir.

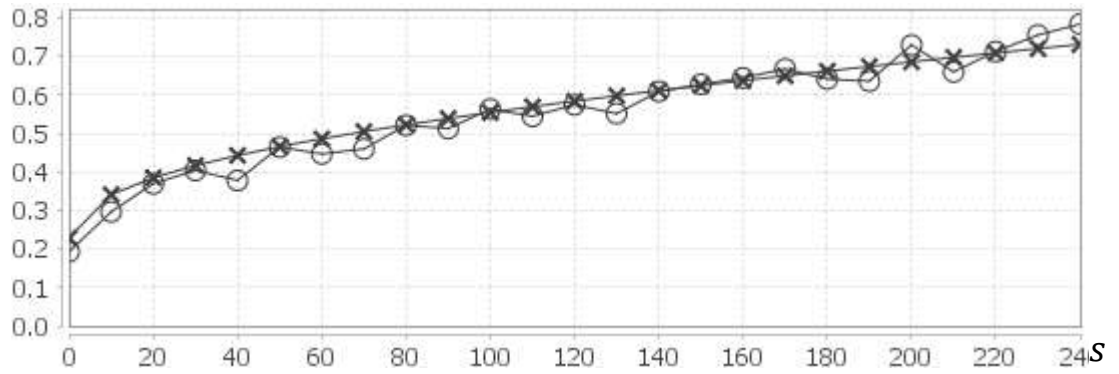
$MS/(m, S)$ sonsuz növbəli model üçün ədədi eksperimentlər zamanı təqribi alqoritm simulyasiyanın nəticələri ilə müqayisə edilir. Ədədi eksperimentlər zamanı sonlu hal üçün istifadə olunan parametrlərin qiymətləri (2.2.4) burdada da doğrudur, sadəcə, erqodiklik şərtini ($\frac{\lambda}{\mu_1 \sigma_1} < 1$) təmin etmək məqsədilə $\lambda = 2.5$ qəbul edilmişdir:

Müqayisənin nəticələri Qrafik 2.2.7 və Qrafik 2.2.8-də təqdim olunmuşdur. Bütün qrafiklərdə o və x uyğun olaraq təqribi və simulyasiya üsullarına uyğun əyriyələri işarələmək üçün istifadə edilmişdir.



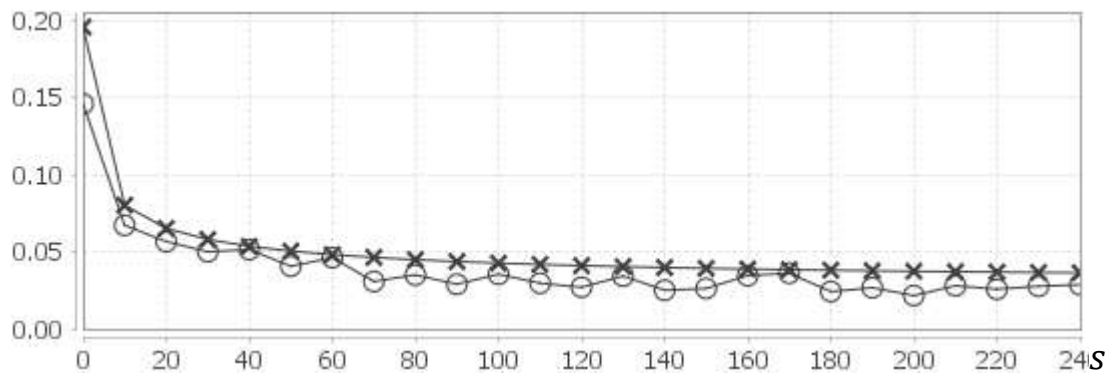


RR

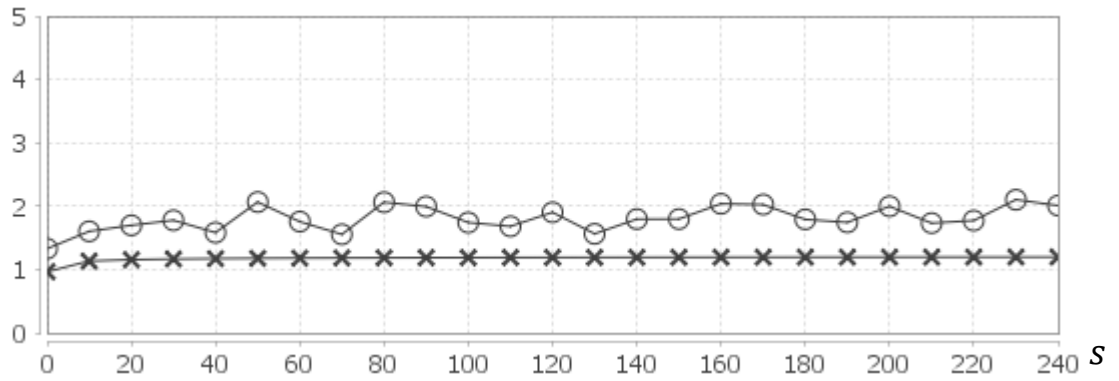


Qrafik 2.2.7 Anbar prosesləri ilə əlaqəli QoS göstəricilərinin sonsuz növbəli MS/(m, S) modeli üçün təqribi və simulyasiya üsullarının müqayisəsi

PL



L_{av}



Qrafik 2.2.8 Sorğularla əlaqəli keyfiyyət göstəricilərinin sonsuz növbəli MS/(m, S) modeli üçün təqribi və simulyasiya üsullarının müqayisəsi

Qrafiklərdən göründüyü kimi təqribi və simulyasiya üsullarının nəticələri bir-birinə çox yaxın və bəzən eynidir. Müşahidə olunan xətlər isə praktiki cəhətdən qəbul olunandır.

Sonlu (bax, Qrafik 2.2.5 və Qrafik 2.2.6) və sonsuz (bax, Qrafik 2.2.7 və Qrafik 2.2.8) növbəli MS/(m, S) modeli üçün ədədi eksperimentlərin nəticələrini müqayisə etdikdə belə nəticəyə gəlirik ki, daxilolma intensivliyini dörd dəfə azaltdıqda və növbənin limitini aradan qaldırdıqda sorğulara xidmətlə əlaqəli keyfiyyət göstəricilərinin (PL , L_{av}) qiymətləri yaxşılaşsa da, anbarla əlaqəli QoS-lar (S_{av} , Γ_{av} , V_{av} və RR), demək olar ki, dəyişmir.

Beləliklə, fəza iriləşdirmə alqoritminin dəqiqliyi analiz olundu. Daha sonra isə müxtəlif tipli sorğuları olan ikiölçülü ehtiyatları xarab olan sonlu və sonsuz növbəli və müxtəlif EA qaydaları tətbiq olunan modellər üçün QoS-ların EA həddindən asılılığı və müqayisəli analizi təhlil edildi. Ədədi eksperimentlərin davamında optimallaşdırma məsələlərinə baxılacaq.

2.2.4. Optimallaşdırma məsələləri

Sistemin stasionar halda ümumi məsrəfinin və ya məqsəd funksiyasının minimallaşdırılması məsələlərinə nəzər yetirək. MS/(s, S) modeli üçün optimal EA həddinin seçilməsi, MS/(m, S) modeli üçün iki parametrlili məqsəd funksiyasının

minimallaşdırılması, MS/(S-1, S) modeli üçün isə optimal xidmət serverinin seçilməsi məsələlərini həll edək.

MS/(s, S) modeli üçün məqsəd funksiyasını aşağıdakı qaydada təyin edək:

$$TC(s) = c_r RR + c_h S_{av} + c_p \Gamma_{av} + c_l \lambda PL + c_w L_{av} \quad (2.2.5)$$

Burada c_r – vahid EA tələbinin yerləşdirilməsi və icrası ilə əlaqəli məsrəfi

c_h – anbarda vahid ehtiyatın saxlanma məsrəfi,

c_p – vahid ehtiyatın xarabolma məsrəfi,

c_l – vahid sorğunun itmə məsrəfi,

c_w – vahid sorğu üçün növbədə gözləmə məsrəfini müəyyən edir.

Qeyd olunan əmsallar əvvəlcədən məlum olur və ya eksperimental qaydada tapılır.

Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər daxilində (2.2.5) funskiyasını minimallaşdırmaq tələb olunur:

- $S_{av}(s) \leq S^*$
- $PL(s) \leq PL^*$

Burada S^* və PL^* optimallaşdırma məsələsi tərəfindən ehtiyatların orta səviyyəsinə və sorğuların itməsi ehtimalına qoyulan limitlərdir. Yəni, s parametrinin elə qiymətini tapmaq tələb olunur ki, verilən şərtlər daxilində TC funksiyası minimal qiymət alsın.

S^* və PL^* kəmiyyətlərinin istənilən qiymətlərində həllər çoxluğu diskret sonlu olduğundan (2.2.5) problemini həll etmək həmişə mümkündür. Bunun üçün diskret s arqumentinə nəzərən tam seçmə üsulundan (brute force) istifadə etmək olar.

MS/(s, S) modelinin sonlu növbəli halı üçün bütün hallarda (2.2.5) optimallaşdırma məsələsinin həlli trivialdır və TC məqsəd funksiyası $s = 0$ qiymətində minimallaşır. Buna səbəb, $s = 0$ olduqda TC funksiyasında iştirak edən bütün toplananların minimal qiymət almasıdır (bax, Qrafik 2.2.5 və Qrafik 2.2.6).

Sonsuz növbəli hal üçün optimallaşdırma məsələsinin S^* və PL^* giriş parametrlərinin müxtəlif qiymətlərində həlləri Cədvəl 2.2.5-də təqdim olunmuşdur.

Cədvəl 2.2.5 MS/(s, S) sonsuz növbəli hal üçün (2.2.5) məsələsinin həlli

S^*	6	9	10	10	11	11	12	12	12	13	13	13
PL^*	0.04	0.08	0.08	0.06	0.08	0.04	0.08	0.06	0.04	0.08	0.06	0.04
s^*	∅	∅	2	∅	2	∅	2	7	∅	2	7	∅
TC^*	∅	∅	21.63	∅	21.63	∅	21.63	25.20	∅	21.63	25.20	∅

Cədvəl 2.2.5-də ∅ optimal həllin mövcud olmadığını işarələmək üçündür. s^* kəmiyyəti s parametrinin TC funksiyasını minimallaşdıran qiyməti, TC^* isə TC funksiyasının minimal qiymətini işarələmək üçün istifadə olunmuşdur. (2.2.5) optimallaşdırma məsələsini həll edərkən TC funksiyasının əmsalları aşağıdakı qaydada seçilmişdir:

$$c_r = 15, c_h = 0.3, c_l = 5, c_w = 3, c_p = 0.3 \quad (2.2.6)$$

(2.2.5) məsələsinin analizindən alınır ki, daxilolma intensivliyinin yüksək qiymətlərində optimallaşdırma məsələsinin həlli sistem parametrlərindən asılılığını itirir. Bu nəticə isə praktik cəhətdən çox böyük əhəmiyyət daşıyır. Bu fakt keyfiyyət göstəricilərinin daxilolma intensivliyinə nəzərən az dəyişməsi ilə izah olunur.

Sonsuz növbəli ($N = \infty$) $MS/(m, S)$ modeli üçün iki parametrlili məqsəd funksiyasını aşağıdakı qaydada təyin edək:

$$TC(d, s) = (K + c_r R_{av})RR + c_s S_{av} + c_p \Gamma_{av} + c_l LR + c_w L_{av} \quad (2.2.7)$$

Burada K – EA tələbinin birdəfəlik məsrəfi,

c_r – EA tələbinin vahid ehtiyat üçün icra olunma məsrəfi,

c_s – anbarda vahid ehtiyatın saxlanma məsrəfi,

c_p – anbarda vahid ehtiyatın xarab olma məsrəfi,

c_l – sorğunun itmə məsrəfi,

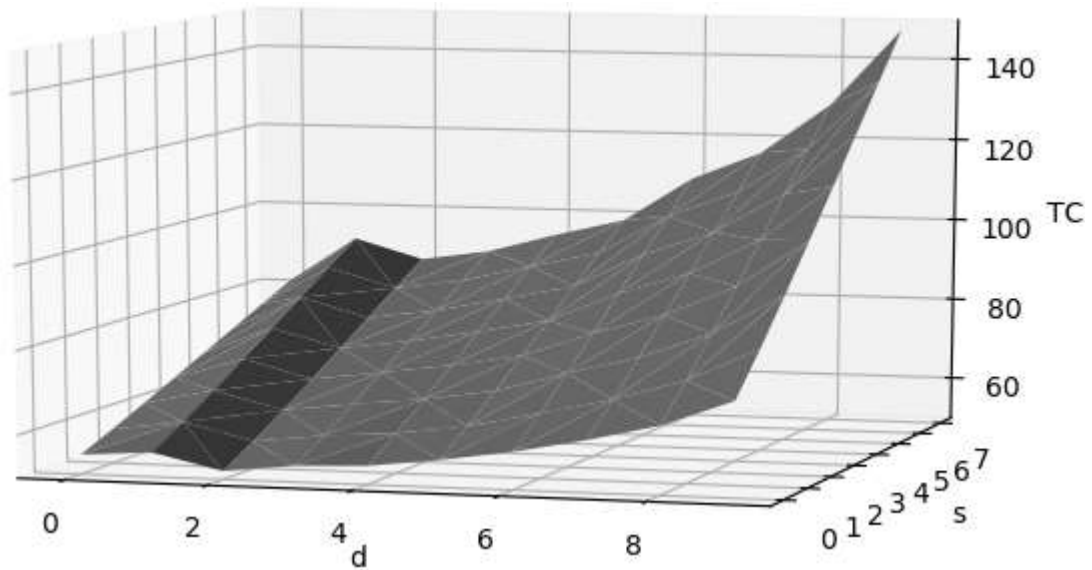
c_w – növbədə vahid sorğunun gözləmə məsrəfi.

(2.2.7) məsələsini həll etmək üçün fərz olunur ki, EA tələbini yerinə yetirəcək müxtəlif təchizatçılar mövcuddur və icra vaxtından asılı olaraq müxtəlif qiymət siyasətlərinə məxsusdur. Belə ki, $d: d = 0, \dots, D$ nömrəli təchizatçının intensivliyi və

qiymət siyasəti $(v, K, c_r)_d$ ilə işarə olunur. Beləliklə, (d, s) cütlüyünün TC funksiyasını minimallaşdıran qiymətlərini tapmaq tələb edilir. Qeyd edək ki, eksperiment zamanı sistemin parametrlərinin və optimallaşdırma əmsallarının qiymətləri aşağıdakı kimi seçilmişdir:

$$\begin{aligned} c_s = 3, c_p = 2, c_l = 3.5, c_w = 2.5, \\ \lambda = 10, \gamma = 1, S = 15, \tau = 1, \phi_1 = 0.4, \sigma_1 = 0.3, \mu_1 = 40, \mu_2 = 10 \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Əlavə olaraq, eksperimentdə istifadə olunan mövcud təchizat xidmətləri bunlardır: $(0.5, 1, 0.2)_0$, $(1, 1.5, 0.3)_1$, $(1.5, 1.5, 0.3)_2$, $(1.5, 2, 0.25)_3$, $(2, 2.2, 0.3)_4$, $(2, 2.5, 0.3)_5$, $(2.5, 2.5, 0.5)_6$, $(2.5, 3, 0.5)_7$, $(2.5, 3, 0.7)_8$, $(3, 3.5, 1)_9$. (2.2.7) məsələsinin həlli zamanı, spektral hədd $M = 15$ qəbul olunur. Baxılan optimallaşdırma məsələsinin həlli Qrafik 2.2.9-da üçölçülü qrafik vasitəsilə təqdim olunmuşdur.



Qrafik 2.2.9 Sonsuz növbəli MS/(m,S) modeli üçün məqsəd funksiyasının (TC) təchizatçı seçimi (d) və EA həddindən (s) asılılığı qrafiki

Qrafik 2.2.9-dan görüldüyü kimi, ümumilikdə, EA xidməti bahalaşdıqca və EA həddi artdıqca məqsəd funksiyasının qiyməti artır. Lakin, cari halda optimal cütlük $(2,0)$ -dır, yəni məqsəd funksiyasını minimallaşdırmaq üçün 2 nömrəli təchizatçı xidmətindən $(1.5, 1.5, 0.3)_2$ istifadə etmək və EA həddini 0 götürmək lazımdır.

TC funksiyasının forması müəyyən qanunauyğunluğa tabe olmayıb sistemin parametrlərindən asılıdır. Bununla belə, kritik hədd parametrini əksər hallarda və bizim baxdığımız halda EA tələblərinin sayını azaltmaq məqsədilə minimal götürmək lazımdır, çünki, bu zaman birdəfəlik təchizatçı məsrəfini (K) azaltmış oluruq.

$MS/(S-1, S)$ modelinin sonlu və sonsuz növbəli variantları üçün optimal xidmət serverinin seçilməsi məsələsində minimallaşdırılacaq TC məqsəd funksiyası aşağıdakı qaydada müəyyən olunur:

$$TC = c_h S_{av} + c_r RR + c_p \Gamma_{av} + c_w L_{av} + c_b RL_b + c_g RL_r + c_s P_b \quad (2.2.9)$$

Burada P_b serverin məşğul olma ehtimalını işarələmək üçün istifadə olunur, $P_b = \sum_{m=1}^S \sum_{n=1}^N p(m, n)$.

(2.2.9) formulunda əmsallar $MS/(s, S)$ və $MS/(m, S)$ modellərində olduğu kimi müəyyən olunur (bax, (2.2.5) və (2.2.7)) və əlavə olaraq, c_b növbənin dolması səbəbindən sorğunun itmə xərci, c_g səbirsizlik səbəbindən sorğunun itmə xərci və c_s vahid zamanda serverin xidmət məsrəfini ifadə edir.

Öncə, **sonlu növbəli** hal üçün (2.2.9) məsələsinə baxaq. Fərz edək ki, seçim üçün dörd növ server mövcuddur: 1) $\mu_1 = 5, \mu_2 = 1$; 2) $\mu_1 = 8, \mu_2 = 2$; 3) $\mu_1 = 10, \mu_2 = 4$; 4) $\mu_1 = 15, \mu_2 = 5$. Hər bir $k, k = 1, 2, 3, 4$ seçiminə uyğun optimallaşdırma əmsalının qiymətləri isə $c_s^{(k)}$ ilə işarə olunur: $c_s^{(1)} = 1, c_s^{(2)} = 2, c_s^{(3)} = 3, c_s^{(4)} = 4$. (2.2.9) formulundakı digər əmsalların qiyməti isə aşağıdakı kimi müəyyən olunur:

$$c_h = 1, c_r = 0.1, c_p = 2, c_w = 2.5, c_b = 3, c_g = 2 \quad (2.2.10)$$

Yuxarıda verilən parametrlər üçün (2.2.9) məsələsinin həlli Cədvəl 2.2.6-da təqdim olunmuşdur.

Cədvəl 2.2.6 $MS/(S-1, S)$ sonlu növbəli hal üçün (2.2.9) məsələsinin həlli

$s \backslash \lambda$	5	10	15	30
10	4	4	4	4
50	4	2	2	2

80	1	1	1	1
----	---	---	---	---

Cədvəl 2.2.6-da nəticələr növbənin maksimal uzunluğunun $N = 150$ qiyməti üçün hesablanmışdır. Digər sistem parametrləri də aşağıdakı qaydada seçilmişdir:

$$\gamma = 2, \nu = 1, \tau = 0.5, \phi_1 = 0.6, \sigma_1 = 0.3 \quad (2.2.11)$$

Cədvəl 2.2.6-dan aydın olur ki, anbar ehtiyatının həcmi S artıqda aşağı intensivlikli xidmət serveri, azaldıqda isə yuxarı intensivlikli xidmət serverin seçilməsi (2.2.9) məqsəd funksiyasını optimallaşdırır.

Sonsuz növbəli hal üçün sistem parametrləri və optimallaşdırma əmsalları aşağıdakı qaydada müəyyən olunmuşdur:

$$\begin{aligned} \gamma &= 4, \nu = 2, \tau = 6, \phi_1 = 0.6, \sigma_1 = 0.3, \\ c_h &= 1, c_r = 0.0001, c_p = 2, c_w = 1, c_b = 3, c_g = 2 \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Mövcud xidmət serverlərinin parametrləri isə bu cür verilmişdir: 1) $\mu_1 = 25, \mu_2 = 10$; 2) $\mu_1 = 40, \mu_2 = 20$; 3) $\mu_1 = 45, \mu_2 = 30$; 4) $\mu_1 = 60, \mu_2 = 50$. Hər bir serverin optimallaşdırma əmsalları isə növbəti qaydada təyin olunmuşdur: $c_s^{(1)} = 1, c_s^{(2)} = 3, c_s^{(3)} = 5, c_s^{(4)} = 8$. $N = \infty$ modeli üçün (2.2.9) məsələsinin həlli Cədvəl 2.2.7-də verilmişdir.

Cədvəl 2.2.7 MS/(S-1, S) $N = \infty$ halı üçün optimallaşdırma məsələsinin həlli

$s \backslash \lambda$	2	5	7	10
20	1	1	2	2
24	1	3	3	3
28	1	3	4	4
30	1	3	4	4

Cədvəl 2.2.7-dən belə nəticəyə gəlmək olar ki, sonlu modeldən fərqli olaraq anbar ehtiyatının həcmi S artıqda yuxarı intensivlikli xidmət serverinin, azaldıqda isə

uyğun olaraq aşağı intensivlikli xidmət serverinin seçilməsi sistemin stasionar halda işini optimallaşdırır.

Beləliklə, müxtəlif tipli sorğuları olan EX-KXES üçün müxtəlif EA qaydalarının tətbiqi altında fərqli optimallaşdırma məsələlərinin qoyuluşu və həlli təhlil olunmuş, nəticələr cədvəl və qrafik formalarda təqdim edilmişdir. Optimallaşdırma məsələlərinin həllində təqribi alqoritmin dəqiqliyi və praktiki əhəmiyyəti isbat olunmuşdur.

2.3. İkinci fəslin nəticələri

Yeni müxtəlif tipli sorğulu ikiölçülü EX-KXES modeli təqdim edilmişdir. Modelin parametrləri, keçid matrisi, QoS göstəriciləri müəyyən olunmuşdur.

Yeni modelin sonlu və sonsuz növbəli halları üçün üç fərqli EA qaydalarının tətbiqi əsasında stasionar ehtimallarının və keyfiyyət göstəricilərin hesablanması üçün dəqiq və təqribi alqoritmlər vasitəsilə düsturlar alınmış və erqodiklik şərtləri müəyyən edilmişdir.

Ədədi eksperimentlər vasitəsilə iriölçülü modellər üçün stasionar ehtimalların və keyfiyyət göstəricilərin hesablanmasında fəza iriləşdirilməsi alqoritminin dəqiqliyi və praktiki səmərəliliyi isbat olunmuşdur. Təqribi alqoritmin anbar prosesləri ilə əlaqəli QoS-larda tam dəqiqliyi, sorğulara xidmətlə əlaqəli QoS-larda isə praktiki nəzərə alınmayacaq xətalara olmağı göstərilmişdir.

$MS/(s, S)$ və $MS/(s, S-m)$ modellərinin müqayisəli analiz nəticələrindən ehtiyatların saxlanması və optimallaşdırılma baxımından $MS/(s, S)$ modelinin daha üstün olması bəlli olmuşdur.

Fərqli optimallaşdırma məsələlərinə baxılmış, sistemin idarə olunan parametrləri kimi EA həddi və təchizatçı seçimi müəyyən edilmiş, yeni bir və ikiölçülü məqsəd funksiyaları təqdim olunmuşdur. Məqsəd funksiyaları tam seçmə üsulu ilə minimallaşdırılmış və EA həddinin EA məsrəfini azaltmaq üçün minimal seçilməsi qənaətinə gəlinmişdir. $MS/(S,S-1)$ modeli üçün optimal intensivlikli xidmət serverinin seçilməsi məsələsi həll olunmuş və anbar ehtiyatının böyük qiymətlərində sonlu halda

aşağı, sonsuz halda isə yuxarı intensivlikli təchizatçı seçiminin səmərəliliyi bəlli olmuşdur.

Ədədi eksperimentlərin aparılması üçün uyğun proqram təminatları yaradılmışdır.

İkinci fəsildə əldə olunan nəticələr [2, 4, 5, 6, 62, 63, 65, 66] məqalələrində və [7, 70] tezislərində çap olunmuşdur.

III FƏSİL. ÜÇÖLÇÜLÜ EX-KXES MODELLƏRİ

İkinci fəsildə müxtəlif sorğulu ikiölçülü EX-KXES modellərini təhlil etdik. İkiölçülü modeldə sistemin cari vəziyyəti anbar ehtiyatının və növbənin uzunluğu ilə müəyyən olunurdu.

Cari fəslin tədqiqat mövzusu üçölçülü EX-KXES modellərinin analizi olacaq. Belə ki, əvvəlki fəsildə baxılan modellərin vəziyyət vektoruna əks əlaqə və ya orbit komponenti əlavə olunacaq. Yəni, modelin vəziyyəti ikiölçülü analoqdan fərqli olaraq üç komponentli vektorla - anbar ehtiyatının səviyyəsi, növbədəki və orbitdəki sorğuların sayı ilə müəyyən ediləcək.

Orbit komponentinin istifadə məqsədinə nəzərən iki fərqli model analiz olunacaq. Birinci növ əks əlaqəli modeldə xidmət olunduqdan sonra təkrar xidmət tələb edən sorğulu sistemlərə baxılacaq və orbit əks əlaqə buferi kimi istifadə ediləcək. İkinci növ əks əlaqəli modeldə isə səbirsiz və ya ehtiyat olmadıqda müvəqqəti növbəni tərk edərək orbitə qoşulub sistemə sonradan müraciət edən təkrar sorğulu modellər analiz ediləcək.

Baxılan hər bir model üçün keçid matrisi qurulacaq, QoS göstəriciləri və stasionar ehtimalların tapılması üçün dəqiq və təqribi alqoritmlər təqdim olunacaq. Üçölçülü Markov modellərinin simulyasiyasına baxılacaq. Fəslin sonunda isə ədədi eksperimentlərin nəticələri nümayiş etdiriləcək, təqribi üsulların dəqiqliyi qiymətləndiriləcək və keyfiyyət göstəriciləri üçün asılılıq qrafikləri təqdim olunacaq. Əlavə olaraq, müxtəlif optimallaşdırma məsələləri həll ediləcək.

3.1. Gecikən əks əlaqəli modellər

Əvvəlki fəsildə müxtəlif tipli sorğu anlayışını EX-KXES modellərinə tətbiq etdik. Müxtəlif tipli sorğuları olan modeldə fərz olunur ki, xidməti bitmiş sorğu Bernulli sxeminə əsasən ehtiyat əldə edir və ya sistemi əliboş tərk edir və sorğu ehtiyat əldə etmədiyi halda anbardakı ehtiyatların səviyyəsi dəyişməz qalır. Bu fərziyyə bir çox real sistemlərdə ödənilir və klassik KXES sistemlərində nəzərə alınmır.

Klassik KXES sistemlərində nəzərə alınmayan digər bir fərziyyə xidmət olunmuş sorğuların təkrar xidmət əldə etmək üçün sistemə yenidən müraciət etməsi ehtimalıdır. Bu hadisə KXES terminologiyasında **əks əlaqə** (feedback) adlanır. Bu fərziyyə bir çox real sistemlərdə rast gəlinən haldır. Məsələn, xidmətdən razı qalmış sorğu sonradan sistemə təkrar xidmət almaq üçün müraciət edə bilər. Digər nümunə isə müştərinin eyni xidmətdən təkrar-təkrar istifadə etməsidir. Üçüncü misal isə xidmət almış sorğunun anbar ehtiyatını dərhal deyil, müəyyən müddətdən sonra düşünüb qərar verərək əldə etməsidir. Bu baxımdan əks əlaqəli modelləri iki qrupa ayırmaq olar. Belə ki, xidmət olunmuş sorğu təkrar müraciəti dərhal (Ani əks əlaqəli modellər, ingilis dilli ədəbiyyatda - Instantaneous Feedback, IFB) və ya müsbət təsadüfi müddətdən sonra (Gecikən əks əlaqəli modellər, ingilis dilli ədəbiyyatda - Delayed Feedback, DFB) edə bilər.

Bu istiqamətdə görülən ilk işlərə [97, 98] misal gətirmək olar. Takac bu məqalələrində qeyri-məhdud anbar sistemlərini tədqiq etmişdir. Əks əlaqəli klassik modellərinin icmalı [45, 71] məqalələrində təqdim olunmuşdur. Mövcud ədəbiyyatın analizindən sonra belə nəticəyə gəlirik ki, əks əlaqəli KXES modelləri çox az tədqiq olunmuşdur. Bu istiqamətdə tapa bildiyimiz yeganə işlər alim Amirhakodi tərəfindən yazılmış məqalələrdir [11, 12]. Bu məqalələrdə görülən işlərin xülasəsi ilə tanış olaq.

Yuxarıda qeyd olunanlardan [12, s.225-226] məqaləsində bir kanallı ehtiyatları xarab olmayan gecikən əks əlaqəli və sonlu növbəli KXES sistemə baxılır. Sorğular (ilkin sorğular və ya p-sorğular) sistemə Puasson sxeminə əsasən daxil olur və növbə dolu olduqda vahid ehtimalla xidmət göstərilmədən sistemi tərk edir. Xidməti bitmiş sorğu Bernulli sxeminə əsasən ya sistemi tamamilə tərk edir və ya müraciətini gələcəkdə təkrarlamaq üçün əks əlaqə orbitinə qoşulur. Orbitin həcmi (və ya tutumu) məhduddur və orbitdə gözləyən sorğular (təkrar sorğular və ya r-sorğular) bir-birindən asılı olmayaraq təsadüfi vaxtlarda sistemə xidmət üçün təkrar müraciət edirlər. Təkrar sorğular yalnız sistemdə ilkin sorğu olmadıqda və ya anbar ehtiyatı sıfır olduqda server tərəfindən xidmətə qəbul edilirlər. Fərz olunur ki, təkrar sorğular xidmət olunduqdan sonra ehtiyat əldə etmir və anbarın səviyyəsi dəyişməz qalır. İlkin və təkrar sorğuların orta xidmət vaxtları da fərqli eksponensial paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərlə ifadə

olunur. Təkrar sorğuların yenidən təkrarlanması da mümkündür, yəni, eyni sorğu bir neçə dəfə xidmət göstərilib Bernulli sxeminə əsasən əks əlaqə orbitinə daxil ola bilər. Sistemdə (s, S) anbar doldurma qaydası tətbiq olunur. Sistem üçölçülü Markov zənciri ilə modelləşdirilir. Stasionar ehtimalların hesablanması üçün Nyuts metodundan istifadə olunur. QoS göstəriciləri və məqsəd funksiyası üçün düsturlar təqdim olunur.

Ani əks əlaqəli EX-KXES modeli isə [11, s.185-187] məqaləsində tədqiq edilmişdir. Burada MAP axınlı bir kanallı sistemə baxılır. Anbar ehtiyatlarının ömrü eksponensial paylanmış təsadüfi kəmiyyətlə ifadə olunur. Xidməti bitmiş ilkin sorğu (p-sorğu) Bernulli sxeminə əsasən ya sistemi tərk edir və ya qeyri-məhdud əks əlaqə orbitinə qoşulur (r-sorğu). Daha sonra növbəti p-sorğu və r-sorğu xidmətə qəbul edilir. Xidməti bitmiş r-sorğu dərhal orbitə qoşulur və ya sistemi tərk edir. r-sorğunun xidməti bitdikdən sonra anbar səviyyəsi müsbət olduqda p-sorğu xidmət üçün qəbul edilir. Əks halda, anbar ehtiyatı olmadıqda və p-sorğu yoxdursa, server təsadüfi eksponensial paylanmış müddətdə boş qalır. Boş qaldığı müddətdə anbar ehtiyatı müsbətdirsə, sistemə daxil olan p-sorğu server tərəfindən dərhal xidmətə qəbul edilir. Boş qalma müddəti bitdikdə anbar ehtiyatı və p-sorğu yoxdursa, bu zaman r-sorğu xidmət üçün qəbul olunur. [12] məqaləsində olduğu kimi burada da xidməti bitmiş r-sorğu anbar ehtiyatı tələb etmir və r-sorğunun xidməti tamamlandıqdan sonra anbar ehtiyatı dəyişməz qalır. Sistemdə hibrid doldurma qaydası tətbiq edilir. Belə ki, anbar ehtiyatı s həddinə düşdükdə $(S - s)$ həcmli anbar doldurma tələbi yerləşdirilir. Digər tərəfdən, r-sorğunun xidməti bitdikdən sonra anbar ehtiyatı $i \leq s$ olarsa, $S - i$ həcmli doldurma tələbi yerləşdirilir. EA tələbləri faza tipli paylanmış təsadüfi vaxtlarda icra olunur. Sistem altı ölçülü Markov zənciri ilə modelləşdirilir və stasionar ehtimalların tapılması üçün matris analitik üsuldən istifadə edilir. Qeyd edək ki, təqdim olunan alqoritm praktiki cəhətdən çox mürəkkəbdir və iri ölçülü modellər üçün effektiv olmaya bilər.

Gecikən əks əlaqəli modellər qida/ərzaq, kimya və dərman sənayesində, qan banklarında və ehtiyat ömrü məhdud olan bütün sistemlərdə tətbiq oluna bilər. Ehtiyatları xarab olan modellərin real sistemlərdə tətbiqi ilə bağlı ətraflı məlumatı [38] məqaləsindən əldə etmək olar.

Dissertasiyada yuxarıda qeyd olunan [11, 12] məqalələrindəkinə oxşar **gəcikən əks əlaqəli ehtiyatları xarab olan** modelə baxılmışdır. Baxılan model bundan sonra PQIS/DFB kimi işarə olunacaq. Burada oyrənilən modellərin qeyd olunan məqalələrdəki modellərdən fərqli cəhətləri aşağıdakılardır:

- Ehtiyatları xarab olan anbar sistemində baxılacaq.
- Xidməti bitmiş sorğu Bernulli sxeminə əsasən:
 - Sistemi əliboş tərk edir;
 - Ehtiyat əldə edərək sistemi tərk edir;
 - Sorğu ehtiyat əldə etmir və qərar qəbul etmək üçün orbitə qoşulur.
- r-sorğular da ehtiyat əldə edə bilər.
- Sonlu və sonsuz növbəli modellərə baxılır.
- Növbədə olan sorğular ehtiyat olmadıqda səbirsiz olub sistemi eksponensial paylanmış təsadüfi anlarda tərk edir.

Qeyd olunan fərqlər və yeniliklər sistemin reallığa uyğunluğunu daha da artırır. Əlavə olaraq, stasionar ehtimalların hesablanması üçün effektiv **iyerarxiyalı fəza iriləşməsi** alqoritmindən istifadə olunmuşdur. Keyfiyyət göstəriciləri üçün xətti mürəkkəbliyə malik analitik düsturlar təqdim olunmuşdur.

3.1.1. Modelin təsviri və məsələnin qoyuluşu

Baxılan sistemin riyazi modeli ilə tanış olaq. Fərz edilir ki, sistemdə davamlı yoxlanılan və ehtiyatları xarab olan anbar mövcuddur. Anbardakı ehtiyatlar bir-birindən asılı olmayaraq eksponensial paylanmış təsadüfi anlarda xarab olur. Qəbul edilir ki, xidmət zamanı ayrılmış ehtiyat xarab ola bilməz.

Sistemə Puasson sxeminə əsasən ilkin p-sorğular daxil olur. Bütün sorğular identik qəbul edilir və xidmət olunduqdan sonra ehtiyat əldə etdiyi halda anbar ehtiyatı bir vahid azalır.

Sistemə sorğu daxil olduğu anda server boş və anbar ehtiyatı müsbətdirsə, o, dərhal xidmət üçün qəbul edilir. Server məşğul olduqda isə sorğu xidmət gözləmək üçün növbəyə durur. Anbar ehtiyatı olmadıqda sistemə daxil olan sorğu Bernulli sxeminə əsasən ya növbəyə durur, ya da sistemi tərk edir və itmiş qəbul olunur. Anbar

ehtiyatı sıfıra düşdükdə növbədə gözləyən sorğular səbirsiz olur. Səbirsiz sorğular eksponensial paylanmış təsadüfi vaxtdan sonra sistemi tərk edir.

Növbənin sonlu və sonsuz olan hallarına baxılır. Sonlu və ya məhdud olan halda növbə doludursa, sistemə daxil olan sorğu itmiş sayılır. Sonsuz halda isə sistemə daxil olan bütün sorğular növbəyə dura bilər.

Xidmət bitdikdən sonra aşağıdakı üç hadisədən biri baş verə bilər:

- Sorğu sistemi ehtiyat əldə etmədən əliboş tərk edir.
- Sorğu sistemi ehtiyat əldə edərək tərk edir. Bu zaman anbar ehtiyatı bir vahid azalır.
- Sistem ehtiyat əldə etmir, lakin qərar qəbul etmək üçün orbitə qoşulur.

Fərz olunur ki, orbitdə olan sorğular (r -sorğular) anbar və ya növbənin vəziyyətini haqqında heç bir informasiyaya malik deyil və təsadüfi vaxtlarda öz müraciətini təkrarlayaraq sistemə yenidən daxil olurlar. Sistem p -sorğular və r -sorğular arasında heç bir fərq qoymur. Xidmət və səbirsizlik intensivlikləri də hər iki sorğu üçün identik qəbul edilir. Fərz edilir ki, r -sorğular təkrar orbitə qoşula bilər, yəni, orbitə təkrar qoşulma sayına heç bir məhdudiyyət qoyulmur. Əlavə olaraq, orbitdəki sorğular inadkar qəbul olunur, yəni sistemə daxil olan anda növbə doludursa və ya anbarda ehtiyat yoxdursa, r -sorğu dərhal orbitə qayıdır.

Ehtiyat əldə etməsindən asılı olaraq sorğuların orta xidmət intensivlikləri də fərqlənir. Belə ki, ehtiyat əldə etməyən sorğunun orta xidmət vaxtı daha az olur. Xidmət vaxtları fərqli intensivliklərə malik eksponensial paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərlə ifadə olunur.

Sadəlik üçün sistemdə (s, S) EA qaydası tətbiq edilir və EA tələbinin icra olunması vaxtı eksponensial paylanmış təsadüfi kəmiyyətlə təsvir olunur.

Məsələnin qoyuluşuna gəldikdə anbar ehtiyat səviyyəsinin, növbənin və orbitin uzunluğunun birgə stasionar paylanması hesablaşmaq, keyfiyyət göstəricilərini müəyyən etmək və onlar üçün düsturlar almaq tələb olunur. Əlavə olaraq, fəslin sonunda sistemin optimallaşdırılması məsələsinə də baxılır.

Sistemin parametrləri və onların mahiyyəti aşağıdakı kimidir:

- λ – Puasson axını ilə sorğuların sistemə daxilolma intensivliyi;

- γ – Anbarda məhsulların xarab olma intensivliyi;
- N – Növbənin maksimal uzunluğu;
- R – Əks əlaqə buferinin (və ya orbit) maksimal uzunluğu;
- S – Anbarda ehtiyatların maksimal sayı;
- s – EA tələbinin yerləşdirilmə həddi, kritik hədd, $s < S/2$;
- ν – EA tələbinin icra olunma intensivliyi;
- τ – Səbirsiz sorğuların növbəni tərk etmə intensivliyi;
- ϕ_1 – Anbar ehtiyatı sıfır olduqda gələn p-sorğunun xidmət gözləmək üçün növbəyə qoşulması ehtimalı;
- ϕ_2 – Anbar ehtiyatı sıfır olduqda gələn sorğunun itmə ehtimalı;
- σ_1 – Xidməti bitmiş sorğunun ehtiyat əldə etmədən (1-ci növ) sistemi tərk etmə ehtimalı;
- σ_2 – Xidməti bitmiş sorğunun ehtiyat əldə edib (2-ci növ) sistemi tərk etmə ehtimalı;
- σ_3 – Xidməti bitmiş sorğunun ehtiyat əldə etmədən qərar qəbul etmək üçün orbitə qoşulması ehtimalı;
- μ_1 – 1-ci növ sorğunun xidmət olunma intensivliyi;
- μ_2 – 2-ci növ sorğunun xidmət olunma intensivliyi;
- η – r-sorğuların orbitdən sistemə daxilolma intensivliyi.

Sistemin tapılması tələb edilən QoS göstəriciləri aşağıdakılardır:

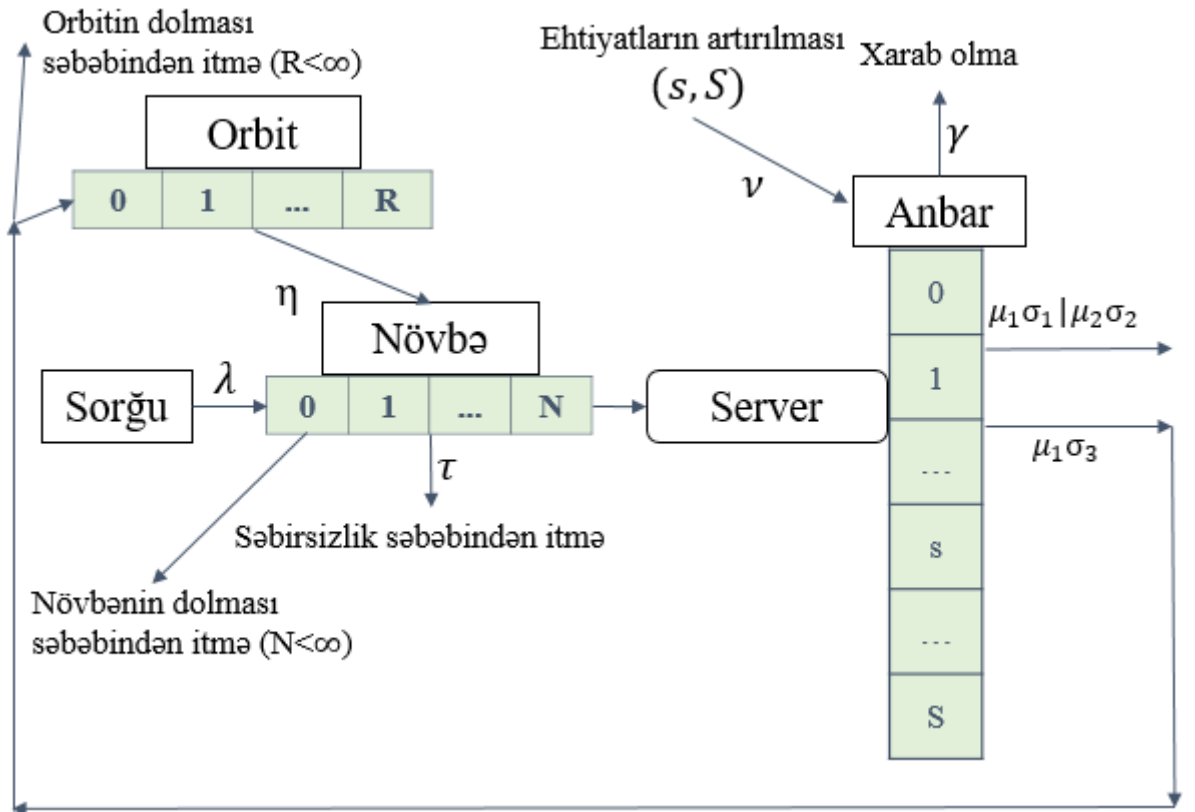
- S_{av} – Anbarın orta səviyyəsi;
- RR – EA tələbinin orta yerləşdirilmə intensivliyi;
- Γ_{av} – Anbarın orta xarab olma intensivliyi;
- L_s – Növbənin orta uzunluğu;
- L_o – Orbitdə sorğuların orta sayı;
- RL – Sorğuların orta itmə intensivliyi.

Sorğuların orta itmə intensivliyi RL üç komponentdən ibarətdir:

- RL_p – növbənin dolması səbəbindən p-sorğuların itmə intensivliyi;
- RL_o – orbitin dolması səbəbindən itmə intensivliyi;

- RL_s – səbirsizlik səbəbindən sorğuların itmə intensivliyi.

Qeyd edək ki, təqdim olunan parametrlər və işarələmələr bundan sonra təqdim olunan bütün modellərdə istifadə olunacaq və yalnız fərqlər təqdim ediləcək. Təqdim olunan EX-KXES modelinin təsviri və parametrlərinə əsasən sistemin işləmə prinsipi Şəkil 3.1.1-də təsvir edilmişdir.



Şəkil 3.1.1 Gecikən əks əlaqəli EX-KXES sisteminin işləmə prinsipi

Sistem vəziyyəti (m, n, k) ilə işarələnən üçölçülü Markov zənciri ilə modelləşdirilir. Burada m anbar ehtiyatının səviyyəsini, n və k uyğun olaraq növbədə və orbitdə gözləyən sorğuların sayının işarələmək üçün istifadə edilir. Sistemin vəziyyətlər fəzası isə aşağıdakı kimi müəyyən olunur:

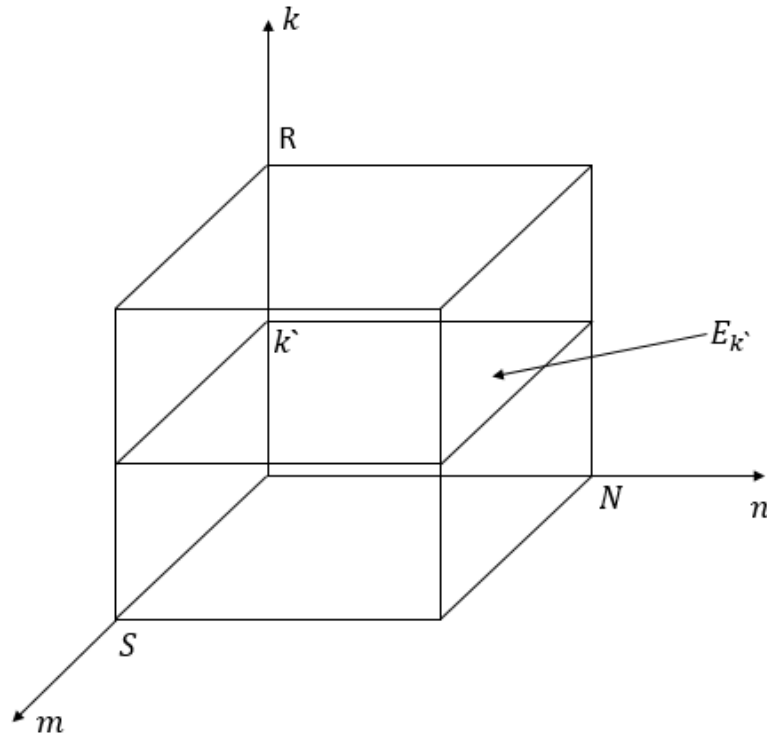
$$E = \{(m, n, k): m = 0, 1, \dots, S; n = 0, 1, \dots, N; k = 0, 1, \dots, R\} \quad (3.1.1)$$

Növbəti addımda vəziyyətlər fəzasını aşağıdakı qaydada alt fəzalara parçalayaq:

$$(3.1.2)$$

$$E = \bigcup_{k=0}^R E_k, \quad E_{k_1} \cap E_{k_2} = \emptyset, k_1 \neq k_2 \text{ olduqda}$$

Burada $E_k = \{(m, n, k) \in E : m = 0, 1, \dots, S; n = 0, 1, \dots, N\}, k = 0, 1, \dots, R$. (3.1.1) və (3.1.2) formullarından vəziyyətlər fəzasını həndəsi olaraq hündürlüyü $R + 1$ və oturacağı $(S + 1)(N + 1)$ olan üçölçülü paralelepiped ilə vizuallaşdırmaq olar (bax, Şəkil 3.1.2).



Şəkil 3.1.2 Baxılan Markov modelinin vəziyyətlər fəzasının həndəsi təsviri

E_k sinfi daxilindəki keçidlər aşağıdakı hadisələr zamanı baş verir:

- sistemə ilkin p-sorğu daxil olduqda
- anbar ehtiyatı artırıldıqda
- xidmət tamamlandıqda
- anbar ehtiyatı xarab olduqda
- səbirsiz sorğu sistemi tərk etdikdə

E_k sinifləri arasındakı keçidlər aşağıdakı hadisələr zamanı baş verir:

- sorğu orbitə daxil olduqda

- r-sorğu orbitdən sistemə daxil olduqda

$(m_1, n_1, k_1) \in E_{k_1}$ vəziyyətindən $(m_2, n_2, k_2) \in E_{k_2}$ vəziyyətinə keçidi $q((m_1, n_1, k_1), (m_2, n_2, k_2))$ ilə işarələyək. Bütün bu keçidlər çoxluğu isə sistemin keçid matrisini (Q matris) təşkil edir.

Keçid matrisinin elementlərini sadəlik naminə aşağıdakı kimi qruplaşdıraraq.

Birinci qrup keçidlərdə orbitin ölçüsü sabit qalır ($k_1 = k_2 = k$), yalnız anbarın səviyyəsi və növbənin uzunluğu dəyişə bilər. Bu keçidlər E_k alt fəzası daxilindəki keçidləri təşkil edir. Burada iki alt-qrupa nəzər salaq.

Birinci alt-qrupu anbar ehtiyatı müsbət olan vəziyyətdən ($m_1 > 0$) baş verən keçidlər təşkil edir. Bu cür keçidlər sistemə yeni sorğu daxil olduqda, sorğunun xidməti başa çatdıqda, anbar ehtiyatı xarab olduqda və ya anbar ehtiyatı artırıldıqda baş verir:

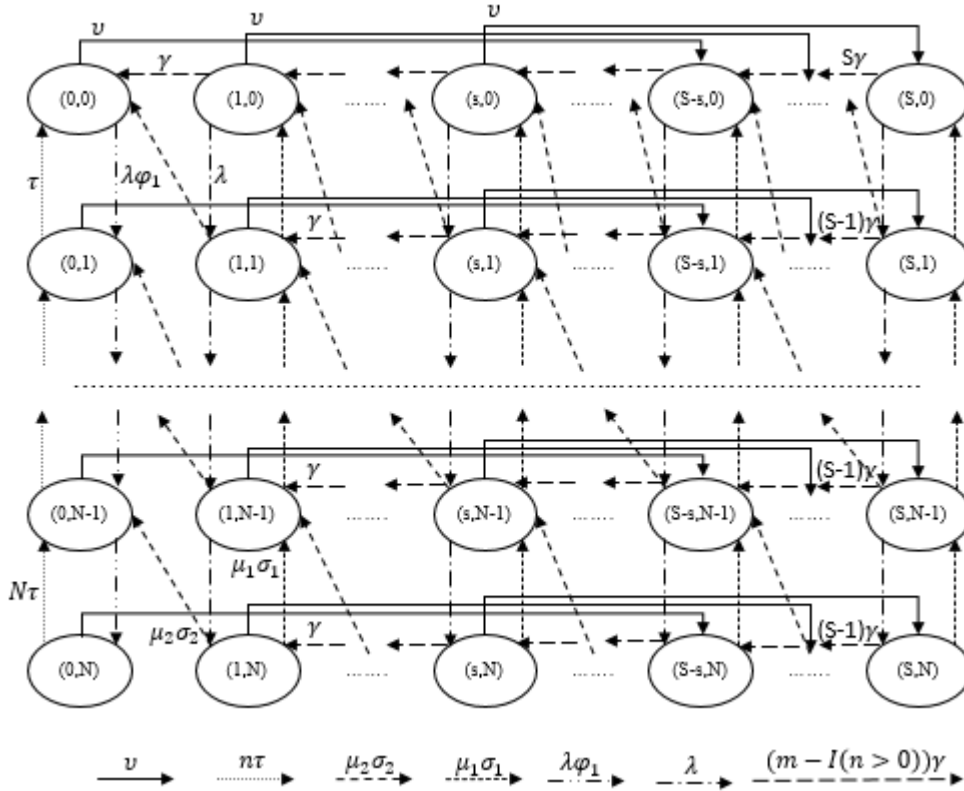
$$q((m_1, n_1, k), (m_2, n_2, k)) = \begin{cases} \lambda, & m_2 = m_1, n_2 = n_1 + 1 \\ \mu_1 \sigma_1, & m_2 = m_1, n_2 = n_1 - 1 \\ \mu_2 \sigma_2, & m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1 - 1 \\ m_1 \gamma, & m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1 = 0 \\ (m_1 - 1) \gamma, & m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1 > 0 \\ \nu, & m_1 \leq s, m_2 = m_1 + S - s, n_2 = n_1 \\ 0, & digər hallarda \end{cases} \quad (3.1.3)$$

İkinci alt-qrupa $m_1 = 0$ vəziyyətindən baş verən keçidlər daxildir və sistemə sorğu daxil olduqda, səbirsiz sorğu sistemi tərk etdikdə, anbar ehtiyatı artırıldıqda baş verir:

$$q((m_1, n_1, k), (m_2, n_2, k)) = \begin{cases} \lambda \phi_1, & m_2 = 0, n_2 = n_1 + 1 \\ n_1 \tau, & m_2 = 0, n_2 = n_1 - 1 \\ \nu, & m_2 = S - s, n_2 = n_1 \\ 0, & digər hallarda \end{cases} \quad (3.1.4)$$

İkinci qrupa E_k sinifləri arasındakı keçidlər aiddir, bu zaman orbitin ölçüsü dəyişir ($k_1 \neq k_2$), anbar ehtiyatı isə dəyişmir ($m_1 = m_2$) və bu cür keçidlər orbitə sorğu qoşulduqda və ya sorğu orbitdən sistemə daxil olduqda baş verir (bax, Şəkil 3.1.3):

$$\begin{aligned}
q((m_1, n_1, k_1), (m_2, n_2, k_2)) &= \\
&= \begin{cases} \mu_1 \sigma_3, & m_1 = 0, n_2 = n_1 - 1, k_2 = k_1 + 1, k_1 < R \\ k_1 \eta, & m_1 > 0, n_2 = n_1 + 1, k_2 = k_1 - 1, n_1 < N \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases} \quad (3.1.5)
\end{aligned}$$



Şəkil 3.1.3 E_k alt fəzası daxilindəki keçid diaqramı

Modelin Q matrisinin psevdokod ilə təsviri Şəkil 3.1.4-də təqdim olunmuşdur.

```

1: function QELEM( $m_1, n_1, k_1, m_2, n_2, k_2$ )  $\triangleright q((m_1, n_1, k_1), (m_2, n_2, k_2))$ 
2:   define  $q := 0$ 
3:   if  $k_2 = k_1$  and  $m_1 > 0$  then
4:     if  $m_2 = m_1$  and  $n_2 = n_1 + 1$  then  $q := \lambda$ 
5:     else if  $m_2 = m_1$  and  $n_2 = n_1 - 1$  then  $q := \mu_1\sigma_1$ 
6:     else if  $m_2 = m_1 - 1$  and  $n_2 = n_1 - 1$  then  $q := \mu_2\sigma_2$ 
7:     else if  $m_2 = m_1 - 1$  and  $n_2 = n_1 = 0$  then  $q := m_1\gamma$ 
8:     else if  $m_2 = m_1 - 1$  and  $n_2 = n_1 > 0$  then  $q := (m_1 - 1)\gamma$ 
9:     else if  $m_1 \leq s$  and  $m_2 = m_1 + S - s$  and  $n_2 = n_1$  then  $q := \nu$ 
10:  else if  $k_2 = k_1$  and  $m_1 = 0$  then
11:    if  $m_2 = 0$  and  $n_2 = n_1 + 1$  then  $q := \lambda\phi_1$ 
12:    else if  $m_2 = 0$  and  $n_2 = n_1 - 1$  then  $q := n_1\tau$ 
13:    else if  $m_2 = S - s$  and  $n_2 = n_1$  then  $q := \nu$ 
14:  else if  $k_2 \neq k_1$  and  $m_2 = m_1 > 0$  then
15:    if  $n_2 = n_1 - 1$  and  $k_2 = k_1 + 1$  then  $q := \mu_1\sigma_3$ 
16:    else if  $n_2 = n_1 + 1$  and  $k_2 = k_1 - 1$  then  $q := k_1\eta$ 
17:  endif
18:  return  $q$ 

```

Şəkil 3.1.4 Keçid matrisinin psevdokod vasitəsilə təsviri

(m, n, k) vəziyyətinin stasionar ehtimalını $p(m, n, k)$ ilə işarələyək. Şəkil 3.1.4-ə əsasən belə nəticəyə gəlirik ki, sistem erqodiklik şərtini ödəyir, buna görə də, yeganə stasionar paylanma vektoru mövcuddur və uyğun balans tənliklərinin həllidir.

QoS göstəricilərindən S_{av} , L_s , L_o uyğun təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləməsinə bərabərdir və aşağıdakı düsturlarla hesablanır:

$$\left. \begin{aligned} S_{av} &= \sum_{(m,n,k) \in E} mp(m, n, k) \\ L_s &= \sum_{(m,n,k) \in E} np(m, n, k) \\ L_o &= \sum_{(m,n,k) \in E} kp(m, n, k) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.6)$$

Digər keyfiyyət göstəriciləri olan RR və Γ_{av} isə aşağıdakı düsturlarla hesablanır:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{av} &= \gamma \left(\sum_{m=1}^s m \sum_{(m,0,k) \in E} p(m, 0, k) + \sum_{m=2}^s (m-1) \sum_{(m,n,k) \in E} p(m, n, k) I(n) \right) \\ RR &= \gamma(s+1) \sum_{(s+1,0,k) \in E} p(s+1, 0, k) + (\mu_2\sigma_2 + s\gamma) \sum_{(s+1,n,k) \in E} p(s+1, n, k) I(n) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.7)$$

Burada $I(n)$ E çoxluğunun indikator funksiyasıdır, $I(n) = \begin{cases} 1, & n \in E \text{ olduqda} \\ 0, & n \notin E \text{ olduqda} \end{cases}$

Sorğuların orta itmə intensivliyi RL keyfiyyət göstəricisinin komponentləri üçün formullar aşağıdakı qaydada müəyyən olunur:

$$\left. \begin{aligned} RL_p &= \lambda \sum_{(m,N,k) \in E} p(m, N, k) + \lambda \phi_2 \sum_{(0,n,k) \in E} p(0, n, k) I(n < N) \\ RL_o &= \mu_1 \sigma_3 \sum_{(m,n,R) \in E} p(m, n, R) I(mn > 0) \\ RL_s &= \tau \sum_{(0,n,k) \in E} np(0, n, k) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.8)$$

Beləliklə, keçid matrisini və keyfiyyət göstəricilərini müəyyən edildi.

3.1.2. Stasionar ehtimalların və keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması

Stasionar ehtimalları və QoS-ları hesablamaq üçün $(S + 1)(N + 1)(R + 1)$ ölçülü tənliklər sistemini həll etmək tələb olunur. Bu cür hesablama praktiki cəhətdən effektiv olmadığından məsələni iyerarxiyalı fəza iriləşməsi alqoritmi vasitəsilə həll edəcəyik. Alqoritmin səmərəliliyini artırmaq məqsədilə fərz edilir ki, E_k fəzaları arasındakı keçidlər daxili keçid intensivliklərinə nəzərən çox kiçikdir, yəni qəbul edilir ki, $\sigma_3 \ll \sigma_2 + \sigma_1$.

Beləliklə, baxılan $N < \infty, R < \infty$ halı üçün alqoritmin tətbiqini nəzərdən keçirək. İlk öncə, (3.1.2) düsturuna əsasən aşağıdakı qaydada iriləşmə funksiya qurulur:

$$U_1((m, n, k)) = \langle k \rangle \quad (3.1.9)$$

(3.1.9) formulunda $\langle k \rangle$ E_k alt fəzası daxilindəki bütün keçidləri təşkil edir və iriləşmiş vəziyyəti işarələmək üçün istifadə olunur. Bütün iriləşmiş vəziyyətlər çoxluğu $\Omega_1 = \{\langle k \rangle: k = 0, 1, \dots, R\}$ ilə işarələnir. Stasionar ehtimallar üçün aşağıdakı təqribi düsturu almış oluruq:

$$p(m, n, k) \approx \rho^k(m, n) \pi_1(\langle k \rangle) \quad (3.1.10)$$

Burada $\rho^k(m, n)$ (m, n) vəziyyətinin E_k daxilindəki stasionar ehtimalı, $\pi_1(\langle k \rangle)$ isə iriləşmiş $\langle k \rangle$ vəziyyətinin stasionar ehtimalıdır, $\langle k \rangle \in \Omega_1$. Beləliklə, (3.1.10) düsturu ilə ilkin problem $R + 1$ ədəd ikiölçülü və bir ölçülü Markov zəncirləri üçün stasionar paylanmaların tapılması problemlərinə parçalandı.

Növbəti addımda, $E_k, k = 0, 1, \dots, R$ daxilindəki yeni ikiölçülü modellərə stasionar $\rho^k(m, n)$ ehtimalların hesablanması üçün fəza iriləşdirilməsi alqoritmi təkrar tətbiq edilir. Bütün ikiölçülü modellər k dəyişəninə nəzərən identik olduğundan k dəyişəninə sabit götürüb aşağıdakı qaydada parçalanma müəyyən edək:

$$E = \bigcup_{m=0}^S E_k^m, E_k^{m_1} \cap E_k^{m_2} = \emptyset, m_1 \neq m_2 \quad (3.1.11)$$

Burada $E_k^m = \{(m, n, k) \in E_k, : n = 0, 1, \dots, N\}, m = 0, \dots, S$.

Analoji qaydada, $U_2((m, n, k)) = \langle m \rangle$ iriləşmə funksiyası təyin olunur, burada $\langle m \rangle$ iriləşmiş vəziyyəti E_k^m alt fəzası daxilindəki bütün vəziyyətləri təşkil edir. $\langle m \rangle$ iriləşmiş vəziyyətlər çoxluğu $\Omega_2 = \{\langle m \rangle : m = 0, 1, \dots, S\}$ ilə işarələnir. Analoji qaydada, aşağıdakı düsturu almış oluruq:

$$\rho^k(m, n) \approx \rho_m^k(n) \pi_2^k(\langle m \rangle) \quad (3.1.12)$$

Burada $\rho_m^k(n)$ (m, n) vəziyyətinin E_k^m fəzası daxilindəki stasionar ehtimalı, $\pi_2^k(\langle m \rangle)$ isə iriləşmiş $\langle m \rangle$ vəziyyətinin stasionar ehtimalıdır, $\langle m \rangle \in \Omega_2$.

$\rho_m^k(n)$ ehtimallarının hesablanmasını nəzərdən keçirək. Keçid matrisindən aydın olur ki (bax, Şəkil 3.1.3), E_k^m fəzası daxilindəki keçidlər k indeksindən asılı deyil, buna görə də, dissertasiyanın davamında $\rho_m^k(n)$ və $\pi_2^k(\langle m \rangle)$ işarələməsində k dəyişəni qeyd edilməyəcək. Şəkil 3.1.4 keçid matrisinə əsasən bütün $E_k^m, m = 1, \dots, S$ fəzaları daxilindəki stasionar ehtimallar klassik $a = \lambda/(\mu_1 \sigma_1)$ yüklü $M/M/1/N$ modelində olduğu kimidir:

$$\rho_m(n) = \frac{a^n(1-a)}{1-a^{N+1}}, \quad m = 1, \dots, S \quad (3.1.13)$$

Sonsuz növbəli modellərdə erqodikliyi təmin etmək məqsədilə fərz edilir ki, $a < 1$.

Analoji qaydada, E_k^0 fəzası daxilindəki vəziyyətlərin stasionar ehtimalları $b = \lambda\phi_1/\tau$ yüklü Erlang $M/M/N/N$ modelinə uyğun qaydada hesablanır:

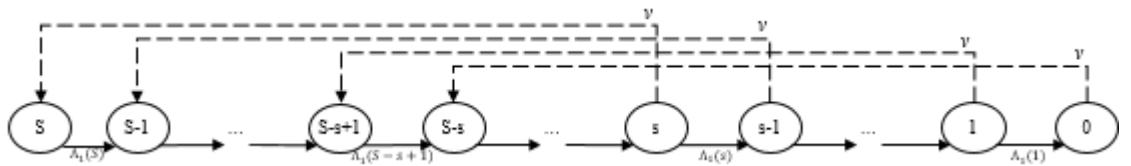
$$\rho_0(n) = \frac{\theta(b, n)}{\sum_{j=0}^N \theta(b, j)}; \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (3.1.14)$$

Burada fərz edilir ki, $\theta(i, j) = \frac{(i^j)}{j!}$.

Keçid matrisindən, (3.1.13) və (3.1.14) formullarından istifadə etməklə müəyyən çevirmələrdən sonra iriləmiş $\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle$ vəziyyətləri arasındakı keçid intensivliyini hesablamaq üçün aşağıdakı düsturu almış oluruq (bax, Şəkil 3.1.5):

$$q(\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle) = \begin{cases} \Lambda(m_1), & m_2 = m_1 - 1 \\ \nu, & m_1 \leq s, m_2 = m_1 + S - s \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases} \quad (3.1.15)$$

Burada $\Lambda_1(m_1) = m_1\gamma\rho(0) + (1 - \rho(0))(\mu_2\sigma_2 + (m_1 - 1)\gamma)$, $m_1 = 1, \dots, S$. Fərz olunur ki, $\Lambda_1(0) = 0$.



Şəkil 3.1.5 E_k^m fəzası daxilindəki keçid diaqramı

Aşağıdakı işarələmələri qəbul edək:

$$\alpha_m = \prod_{i=m+1}^{s+1} \frac{\Lambda_1(i)}{\nu + \Lambda_1(i-1)}; \quad \beta_m = \frac{\Lambda_1(s+1)}{\Lambda_1(m)}; \quad \chi_m = \frac{\nu}{\Lambda_1(m)} \sum_{i=m-S+s}^s \alpha_i \quad (3.1.16)$$

$\pi_2(\langle m \rangle)$ stasionar ehtimalları üçün (3.10) formullarından bu düsturu almış oluruq:

$$\pi_2(\langle m \rangle) = \begin{cases} \alpha_m \pi_2(\langle s+1 \rangle), & 0 \leq m \leq s \\ \beta_m \pi_2(\langle s+1 \rangle), & s+1 \leq m \leq S-s \\ \chi_m \pi_2(\langle s+1 \rangle), & S-s+1 \leq m \leq S \end{cases} \quad (3.1.17)$$

$\pi_2(\langle s+1 \rangle)$ stasionar ehtimalı isə normallaşdırma şərtindən hesablanır:

$$\pi_2(\langle s+1 \rangle) = \left(\sum_{m=0}^s \alpha_m + \sum_{m=s+1}^{S-s} \beta_m + \sum_{m=S-s+1}^S \chi_m \right)^{-1} \quad (3.1.18)$$

Analoji qaydada $\langle k_1 \rangle, \langle k_2 \rangle \in \Omega_1$ vəziyyətləri arasındakı keçid intensivlikləri üçün aşağıdakı münasibət doğrudur:

$$q(\langle k_1 \rangle, \langle k_2 \rangle) = \begin{cases} \Lambda_2, & k_2 = k_1 + 1 \\ k_1 M_2, & k_2 = k_1 - 1 \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases} \quad (3.1.19)$$

Burada fərz edilir ki, $\Lambda_2 = \mu_1 \sigma_3 (1 - \rho(0))(1 - \pi_2(\langle 0 \rangle))$ və $M_2 = \eta (1 - \rho(N))(1 - \pi_2(\langle 0 \rangle))$.

(3.1.19) düsturundan belə qənatə gəlmək olar ki, $\pi_1(\langle k \rangle), \langle k \rangle \in \Omega_1$ stasionar ehtimalları $c = \Lambda_2 / M_2$ yüklü $M/M/R/R$ modelinə analoji qaydada aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\pi_1(\langle k \rangle) = \frac{\theta(c, n)}{\sum_{j=0}^R \theta(c, j)}; \quad k = 0, 1, \dots, R \quad (3.1.20)$$

Nəhayət, (3.1.10) və (3.1.12) düsturlarından $p(m, n, k)$ stasionar ehtimalı üçün aşağıdakı formulu almış oluruq:

$$p(m, n, k) \approx \rho_m(n) \pi_2(\langle m \rangle) \pi_1(\langle k \rangle) \quad (3.1.21)$$

QoS göstəriciləri üçün (3.1.6), (3.1.7) və (3.1.8) düsturlarında uyğun əvəzləmələri etdikdən sonra aşağıdakı təqribi formulları əldə edirik:

$$(3.1.22)$$

$$\left. \begin{aligned}
S_{av} &\approx \sum_{m=1}^S m \pi_2(\langle m \rangle) \\
L_s &\approx b \pi_2(\langle 0 \rangle) (1 - E_B(b, N)) + (1 - \pi_2(\langle 0 \rangle)) \left(\frac{a}{1-a} + \frac{N+1}{1-a^{N+1}} a^{N+1} \right) \\
L_o &\approx c(1 - E_B(c, R)) \\
\Gamma_{av} &\approx \gamma \left[\sum_{m=1}^S \pi_2(\langle m \rangle) \left(m \frac{1-a}{1-a^{N+1}} + (m-1) \frac{a-a^{N+1}}{1-a^{N+1}} \right) \right] \\
RR &\approx \pi_2(\langle s+1 \rangle) ((s+1)\gamma \frac{1-a}{1-a^{N+1}} + (\mu_2 \sigma_2 + s\gamma) \frac{a-a^{N+1}}{1-a^{N+1}}) \\
RL_p &\approx \lambda \left(a^N \frac{1-a}{1-a^{N+1}} (1 - \pi_2(\langle 0 \rangle)) + (E_B(b, N) + \phi_2(1 - E_B(b, N))) \pi_2(\langle 0 \rangle) \right) \\
RL_o &\approx \mu_1 \sigma_3 E_B(c, R) (1 - \rho(0)) (1 - \pi_2(\langle 0 \rangle)) \\
RL_s &\approx \tau \pi_2(\langle 0 \rangle) \sum_{n=1}^N n \rho_0(n) = b \tau \pi_2(\langle 0 \rangle) (1 - E_B(b, N))
\end{aligned} \right\}$$

Yuxarıdakı (3.1.22) düsturlarında $E_B(x, K)$ funksiyası x yüklü $M/M/K/K$ Erlang modeli üçün sorğunun itmə ehtimalının hesablanması düsturunu ifadə edir. Təqdim olunan formullarda fərz edilir ki, $a \neq 1$. $a = 1$ halı üçün düsturlar daha sadələşir: $\rho(n) = \frac{1}{1-N}$, $n = 0, \dots, N$. (3.1.13)-(3.1.21) düsturlarından görüldüyü kimi stasionar ehtimallar bütün sistem parametrlərindən asılıdır. Eyni zamanda, (3.1.22) düsturlarına əsasən yalnız L_o kəmiyyəti r-sorğuların daxilolma intensivliyindən asılıdır. Buna səbəb, bizim fərziyyəməizə əsasən orbitə qoşulma ehtimalının sistemi tərk etmə ehtimalından və r-sorğuların daxilolma intensivliyinin p-sorğularından çox kiçik olmasıdır. Digər tərəfdən, p-sorğuların daxilolma intensivliyi orbitdəki sorğuların orta sayına təsir göstərdiyindən bütün keyfiyyət göstəriciləri dolayısı η parametridən də asılı olur.

Beləliklə, gecikən əks əlaqəli modelinin sonlu halı üçün stasionar ehtimallar və QoS göstəriciləri üçün təqribi düsturlar əldə etdik. Dissertasiyanın davamında təqdim olunan texnologiyanın növbənin və/və ya orbitin qeyri-məhdud halları üçün tətbiqinin nəticələrinə baxılacaq.

3.1.3. Sonsuz növbəli və orbitli halların tədqiqi

Burada ara çevirmələr ötürülür və hər bir hal üçün yalnız sonlu haldan fərqli məqamlar təqdim olunur.

$N < \infty$ və $R = \infty$ halı

- $\rho_m(n)$ və $\rho_0(n)$ stasionar ehtimalları sonlu hala analogi qaydada (3.1.13) və (3.1.14) düsturları ilə hesablanır.
- $\pi_1(\langle k \rangle), \langle k \rangle \in \Omega_1$ stasionar ehtimalları $M(\Lambda_2)/M(M_2)/\infty$ modelinə analogi qaydada hesablanır:

$$\pi_1(\langle k \rangle) = \frac{c^k}{k!}, k = 0, 1, \dots \quad (3.1.23)$$

- Orbit qeyri-məhdud olduğundan orbit dolması səbəbindən sorğu itməsi ehtimalı sıfıra bərabər olur, $RL_o = 0$. Uyğun olaraq, $L_o \approx c$. Digər keyfiyyət göstəriciləri (3.1.22) düsturlarından hesablanır.

$N = \infty$ və $R = \infty$ halı

- Keçid matrisinə əsasən (bax, Şəkil 3.1.4, Şəkil 3.1.3) bütün $E_k^m, m = 1, \dots, S$ fəzaları daxilindəki keçidlər klassik $a = \lambda/(\mu_1\sigma_1)$ yüklü $M/M/1/\infty$ modelində olduğu kimidir:

$$\rho_m(n) = a^n(1 - a), \quad m = 1, \dots, S \quad (3.1.24)$$

- Əlavə olaraq, erqodikliyi təmin etmək məqsədilə fərz edilir ki, $a < 1$.
- E_k^0 fəzası daxilindəki keçidlər klassik $b = \lambda\phi_1/\tau$ yüklü $M/M/\infty$ Erlang modelində olduğu kimidir:

$$\rho_0(n) = \theta(b, n)e^{-b}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.1.25)$$

- İriləşmiş vəziyyətlərin stasionar ehtimalları uyğun olaraq, (3.1.17) və (3.1.23) düsturları ilə hesablanır və bu formullarda $\rho(0) = 1 - a, \rho(N) = 0$.

- S_{av} (3.1.22) düsturlarından hesablanır. Digər QoS-lar üçün düsturlar isə aşağıdakı kimidir:

$$\left. \begin{aligned} L_s &\approx b\pi_2(\langle 0 \rangle) + (1 - \pi_2(\langle 0 \rangle)) \frac{a}{1 - a} \\ L_o &\approx c \\ \Gamma_{av} &\approx \gamma \left[\sum_{m=1}^s \pi_2(\langle m \rangle) (m - a) \right] \\ RR &\approx \pi_2(\langle s + 1 \rangle) ((s + 1)\gamma(1 - a) + (\mu_2\sigma_2 + s\gamma)a) \\ RL_p &\approx \lambda\phi_2\pi_2(\langle 0 \rangle) \\ RL_o &= 0 \\ RL_s &\approx \tau b\pi_2(\langle 0 \rangle) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.26)$$

$N = \infty$ və $R < \infty$ halı

- $E_k^m, m = 1, \dots, S$ və E_k^0 fəzaları daxilindəki keçidlər $N = \infty$ və $R = \infty$ modellərində olduğu kimidir. Əlavə olaraq, erqodikliyi təmin etmək məqsədilə fərz edilir ki, $a = \lambda/(\mu_1\sigma_1) < 1$.
- İriləşmiş vəziyyətlərin stasionar ehtimalları uyğun olaraq, (3.1.17) və (3.1.20) düsturları ilə hesablanır və bu formullarda $\rho(0) = 1 - a, \rho(N) = 0$.
- QoS göstəricilərindən S_{av} və RL_o (3.1.22) düsturlarından hesablanır. Digər keyfiyyət göstəriciləri (3.1.26) düsturlarından tapılır.

Beləliklə, gecikən əks əlaqəli sonlu və sonsuz ölçülü modellər üçün stasionar ehtimalların və QoS göstəricilərinin hesablanması üçün düsturları təqdim etdik. Dissertasiyanın davamında baxılan model PQIS/DFB ilə işarə olunacaq. Növbəti paragrafda orbit komponentinin daha fərqli bir qaydada istifadə olunduğu təkrar sorğulu sonsuz modelin analizinə baxılacaq.

3.2. Təkrar sorğulu M/M/1/ ∞ modeli

Bu paragrafda vahid serverli, sadə axınlı, müsbət xidmət vaxtlı, sonsuz növbəli üçölçülü EX-KXES modelinə baxılacaq. Sistemə daxil olan ilkin p-sorğular anbarda ehtiyat olmadıqda Bernulli sxeminə əsasən ya növbəyə durur, ya da orbitə qoşulur. Digər tərəfdən növbədəki səbirsiz sorğular Bernulli sxeminə əsasən ya sistemi

tamamilə tərk edir, ya da orbitə daxil olur. Orbitdəki sorğular təsadüfi vaxtlarda sistemə təkrar müraciət edir (r -sorğular). Qeyd edək ki, cari modeldə öncə baxılan PQIS/DFB modelindən fərqli olaraq orbitin mənbəyini xidməti bitmiş sorğular deyil, səbirsiz və ya anbar boş olduqda sistemi tərk edən sorğular təşkil edir. Öncə baxdığımız bütün modellərdə olduğu kimi burada da müxtəlif tipli sorğuların olması fərz edilir, yəni, xidmət bitmiş sorğu anbar ehtiyatını Bernulli sxeminə əsasən əldə edir və ya imtina edir, həmçinin sadəlik üçün burada (s, S) EA qaydası tətbiq edilir.

3.2.1. Modelin təsviri və məsələnin qoyuluşu

Sistemə Puasson axını ilə ilkin p -sorğular daxil olur. Xidmət olunmuş sorğu ehtiyat əldə etdiyi halda anbarın səviyyəsi bir vahid azalır. Əlavə olaraq, anbarın səviyyəsi xarab olma səbəbindən də azala bilər. Belə ki, anbarda olan ehtiyatların ömrü bir-birindən asılı olmayaraq eksponensial paylanmış təsadüfi anlarda bitir. Fərz edilir ki, xidmət üçün rezerv olunmuş ehtiyat xarab ola bilməz.

Anbar ehtiyatı müsbət olduqda sistemə daxil olmuş sorğu server məşğul olmadıqda xidmətə qəbul edilir, əks halda, qeyri-məhdud növbəyə qoşulur. Anbar ehtiyatı olmadıqda belə sistemə daxil olan sorğu Bernulli sxeminə əsasən növbəyə durur və ya qeyri-məhdud orbitə qoşulur. Əlavə olaraq, növbədəki sorğular anbar ehtiyatı sıfıra düşdükdə səbirsiz olur və eksponensial paylanmış təsadüfi vaxtlarda bir-birindən asılı olmayaraq sistemi Bernulli sxeminə əsasən ya tamamilə tərk edir və ya orbitə qoşulur.

Sorğular təkrar orbitə qoşula bilər və r -sorğular anbarın və növbənin vəziyyəti barədə məlumatsız olurlar. Orbitdəki sorğular eksponensial paylanmış intervallarda təkrar müraciət edir (r -sorğu) və anbar ehtiyatı olmadıqda dərhal orbitə qayıdır.

Xidməti bitmiş sorğular Bernulli sxeminə əsasən ya anbar ehtiyatı əldə edir və ya əliboş sistemi tərk edir. İlkin və təkrar sorğulara eyni qaydada xidmət göstərilsə də, ehtiyat əldə edib-etməməsindən asılı olaraq xidmət vaxtı dəyişir.

Anbar ehtiyatı (s, S) qaydasına əsasən artırılır. Belə ki, anbar ehtiyatı s ($s < S/2$) səviyyəsinə düşdükdə $(S - s)$ həcmli EA tələbi yerləşdirilir və tələb eksponensial paylanmış təsadüfi vaxtda yerinə yetirilir.

Məsələnin qoyuluşuna gəldikdə sistemin vəziyyətlərinin stasionar paylanmasını və QoS göstəricilərini hesablamaq tələb olunur.

Cari modeldə PQIS/DFB modelindən fərqli olaraq ψ_1 və ψ_2 parametrləri əlavə edilir, ϕ_2 parametrinin mahiyyəti dəyişdirilir və σ_3 parametrinə ehtiyac qalmır:

- ψ_1 – Növbədən çıxan səbirsiz sorğunun sistemi tərk etmə ehtimalı;
- ψ_2 – Növbədən çıxan səbirsiz sorğunun orbitə qoşulma ehtimalı.

Sistem vəziyyəti (m, n, k) ilə işarələnən üçölçülü Markov zənciri ilə modelləşdirilir. Burada m anbar ehtiyatının səviyyəsini, n və k uyğun olaraq növbədə və orbitdə gözləyən sorğuların sayını işarələmək üçün istifadə edilir. Sistemin vəziyyətlər fəzası isə analogi qaydada (3.1.1) ilə müəyyən olunur. Sistemin keçid matrisi Şəkil 3.2.1-dəki psevdo-kod vasitəsilə təqdim olunur.

```

1: function QELEM( $m_1, n_1, k_1, m_2, n_2, k_2$ )
2:   define  $q := 0$ 
3:   if  $k_2 = k_1$  and  $m_1 > 0$  then
4:     if  $m_2 = m_1$  and  $n_2 = n_1 + 1$  then  $q := \lambda$ 
5:     else if  $m_2 = m_1$  and  $n_2 = n_1 - 1$  then  $q := \mu_1\sigma_1$ 
6:     else if  $m_2 = m_1 - 1$  and  $n_2 = n_1 - 1$  then  $q := \mu_2\sigma_2$ 
7:     else if  $m_2 = m_1 - 1$  and  $n_2 = n_1 = 0$  then  $q := m_1\gamma$ 
8:     else if  $m_2 = m_1 - 1$  and  $n_2 = n_1 > 0$  then  $q := (m_1 - 1)\gamma$ 
9:     else if  $m_1 \leq s$  and  $m_2 = m_1 + S - s$  and  $n_2 = n_1$  then  $q := \nu$ 
10:  else if  $k_2 = k_1$  and  $m_1 = 0$  then
11:    if  $m_2 = 0$  and  $n_2 = n_1 + 1$  then  $q := \lambda\phi_1$ 
12:    else if  $m_2 = 0$  and  $n_2 = n_1 - 1$  then  $q := n_1\tau\psi_1$ 
13:    else if  $m_2 = S - s$  and  $n_2 = n_1$  then  $q := \nu$ 
14:  else if  $k_2 \neq k_1$  then
15:    if  $n_2 = n_1$  and  $k_2 = k_1 + 1$  and  $m_2 = m_1 = 0$  then  $q := \lambda\phi_2$ 
16:    else if  $n_2 = n_1 - 1$  and  $k_2 = k_1 + 1$  and  $m_2 = m_1 = 0$  then  $q := n_1\tau\psi_2$ 
17:    else if  $n_2 = n_1 + 1$  and  $k_2 = k_1 - 1$  and  $m_2 = m_1 > 0$  then  $q := k_1\eta$ 
18:  endif
19:  return  $q$ 

```

Şəkil 3.2.1 Keçid matrisinin psevdo-kod vasitəsilə təsviri

Qeyd edək ki, Şəkil 3.1.3 və Şəkil 3.1.4 ilə təsvir olunan keçid matrisləri cari modelin orbitin vəziyyəti dəyişməyən keçidlər üçün identikdir ($k_1 = k_2$). Orbitin vəziyyəti dəyişən keçidlər isə ($k_1 \neq k_2$) fərqlənir, belə ki, cari modeldə orbitin vəziyyəti üç hadisədən sonra dəyişir (bax, Şəkil 3.2.1):

1. Anbar ehtiyatı olmadıqda sistemə daxil olan p-sorğu orbitə qoşulduqda ($\lambda\phi_2$);
2. Səbirsiz sorğu orbitə qoşulduqda ($n_1\tau\psi_2$);
3. Sistemə orbitdən təkrar r-sorğu daxil olduqda ($k_1\eta$).

Orbit və növbə qeyri-məhdud olduğundan cari modeldə RL_p (növbənin dolması səbəbindən p-sorğuların itmə intensivliyi) və RL_o (orbitin dolması səbəbindən itmə intensivliyi) QoS göstəricilərinə baxılmır. Burada da RL_s kəmiyyətindən başqa QoS göstəriciləri uyğun olaraq (3.1.6) və (3.1.7) düsturlarına əsasən hesablanır. RL_s kəmiyyəti isə aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$RL_s = \tau\psi_1 \sum_{(0,n,k) \in E} np(0,n,k) \quad (3.2.1)$$

Qeyd edək ki, modelin stasionar paylanmasını matris analitik üsullarla həll etmək nəzəri mümkün olsa da, Şəkil 3.2.1 ilə təsvir olunan keçid matrisi bu metodlar üçün əlverişli deyil və əlavə olaraq, praktiki reallaşdırılması mürəkkəbdir.

3.2.2. Stasionar ehtimalların və keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması

Cari modeldə PQIS/DFB üçün təqdim olunan iyerarxiyalı fəza iriləşdirilməsi alqoritmini tətbiq edək. Alqoritmin tətbiqinin səmərəliliyi üçün fərz olunur ki, $\eta \ll \gamma$.

Burada da alt fəzalara parçalanma, iriləşmiş vəziyyətlərin müəyyən olunması PQIS/DFB modelinə analogi qaydada aparılır və stasionar ehtimallar (3.1.10), (3.1.12) və (3.1.21) düsturları vasitəsilə hesablanır. (3.1.21) düsturundakı $\pi_2(\langle m \rangle)$ və $\pi_1(\langle k \rangle)$ kəmiyyətləri uyğun olaraq (3.1.17) və (3.1.23) düsturları ilə müəyyən olunur. (3.1.23) formulundakı Λ_2 və M_2 kəmiyyətləri aşağıdakı qaydada hesablanır:

$$\Lambda_2 = \lambda \left(\phi_2 + \phi_1 \frac{\psi_2}{\psi_1} \right), M_2 = \eta(1 - \pi_2(0)) \quad (3.2.2)$$

$\rho_m(n)$ stasionar ehtimalları isə PQIS/DFB modelinin $N = \infty$ və $R = \infty$ halındakı (3.1.24) və (3.1.25) düsturları ilə hesablanır.

QoS göstəriciləri üçün aşağıdakı düsturları almış oluruq:

$$(3.2.3)$$

$$\left. \begin{aligned}
S_{av} &\approx \sum_{m=1}^s m \pi_2(\langle m \rangle) \\
L_s &\approx b\pi_2(\langle 0 \rangle) + (1 - \pi_2(\langle 0 \rangle)) \frac{a^2}{1-a} \\
L_o &\approx c \\
\Gamma_{av} &\approx \gamma \left[\sum_{m=1}^s \pi_2(\langle m \rangle) (m-a) \right] \\
RR &\approx \pi_2(\langle s+1 \rangle) ((s+1)\gamma(1-a) + (\mu_2\sigma_2 + s\gamma)a) \\
RL_s &\approx \lambda\phi_1\pi_2(\langle 0 \rangle)
\end{aligned} \right\}$$

Beləliklə, təkrar sorğulu sonsuz M/M/1/∞ modeli üçün stasionar ehtimallar və QoS göstəriciləri üçün təqribi düsturlar almış olduq. Baxılan model şərti olaraq bundan sonra PQIS/RC ilə işarələnəcək.

3.2.3. (s, S-m) qaydası tətbiq olunan modelin simulyasiyası

PQIS/RC modelinə aşağıdakı yenilikləri və ümumiləşmələri daxil edək:

- Gəlmə anında anbar ehtiyatı olmadıqda növbəyə durma (ϕ_1), orbitə qoşulma (ϕ_2) seçimlərindən başqa sorğu əlavə ϕ_3 ehtimalla sistemi tərk edə bilər, $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 1$.
- Anbar boş olduqda sistemə daxil olan r-sorğu Bernulli sxeminə əsasən ξ_1 ehtimalla sistemi tərk edir, ξ_2 ehtimalla dərhal orbitə qayıdır, $\xi_1 + \xi_2 = 0$.
- Sistemdə (s, S - m) dəyişən ölçülü EA qaydası tətbiq edilir.
- Anbar ehtiyatı olmadıqda sorğuların itməsi səbirsiz sorğu, daxil olan p-sorğu və ya r-sorğu sistemi tamamilə tərk etdikdə baş verir.

Qeyd olunan dəyişikliklər sistemin reallığa uyğunluğunu daha da artırır. Yeni modeli PQIS/RC/VSO ilə işarələyək. Sistemin keyfiyyət göstəricilərindən S_{av} anbarın orta səviyyəsi, RR EA tələbinin orta yerləşdirilmə intensivliyi, Γ_{av} anbarın orta xarab olma intensivliyi, L_s növbənin orta uzunluğu, L_o orbitdə sorğuların orta sayı (3.1.3) və (3.1.4) düsturlarına əsasən hesablanır. Burada, əlavə olaraq, R_{av} EA tələbinin orta

həcmi və RL_s əvəzinə RL soğruların ümumi itmə intensivliyi keyfiyyət göstəriciləri daxil edilir və aşağıdakı qaydada hesablanır:

$$\left. \begin{aligned} R_{av} &= \sum_{m=S-s}^s m \sum_{(n,k) \in E_m} p(S-m, n, k) \\ RL &= \tau\psi_1 \sum_{(0,n,k) \in E} np(0, n, k) + \eta\xi_1 \sum_{(0,n,k) \in E} kp(0, n, k) + \lambda\phi_3 \sum_{(0,n,k) \in E} p(0, n, k) \end{aligned} \right\} (3.2.4)$$

PQIS/RC/VSO modelinin keçid matrisinin elementlərini sadəlik üçün üç qrupa bölək:

1. Anbar ehtiyatı müsbət və orbitin ölçüsü sabit qalan ($m_1 > 0$ və $k_1 = k_2$) keçidlər:

$$q((m_1, n_1, k), (m_2, n_2, k)) = \begin{cases} \lambda, & m_2 = m_1, n_2 = n_1 + 1 \\ \mu_1\sigma_1, & m_2 = m_1, n_2 = n_1 - 1 \\ \mu_2\sigma_2, & m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1 - 1 \\ m_1\gamma, & m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1 = 0 \\ (m_1 - 1)\gamma, & m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1 > 0 \\ \nu, & m_1 \leq s, m_2 = S, n_2 = n_1 \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases} (3.2.5)$$

2. Anbar ehtiyatı olmayan və orbitin ölçüsü sabit qalan ($m_1 = 0$ və $k_1 = k_2$) keçidlər:

$$q((m_1, n_1, k), (m_2, n_2, k)) = \begin{cases} \lambda\phi_1, & m_2 = 0, n_2 = n_1 + 1 \\ n_1\tau\psi_1, & m_2 = 0, n_2 = n_1 - 1 \\ \nu, & m_2 = S, n_2 = n_1 \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases} (3.2.6)$$

3. Anbar ehtiyatı sabit qalan və orbitin ölçüsü dəyişən ($m_1 = m_2$ və $k_1 \neq k_2$) keçidlər:

$$(3.2.7)$$

$$q((m_1, n_1, k_1), (m_2, n_2, k_2)) = \begin{cases} \lambda\phi_2, & m_1 = 0, n_2 = n_1, k_2 = k_1 + 1 \\ n_1\tau\psi_2, & m_1 = 0, n_2 = n_1 - 1, k_2 = k_1 + 1 \\ k_1\eta, & m_1 > 0, n_2 = n_1 + 1, k_2 = k_1 - 1 \\ k_1\eta\xi_1, & m_1 = 0, n_2 = n_1, k_2 = k_1 - 1 \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases}$$

Sistemin erqodikliyini təmin etmək məqsədilə fərz edilir ki, $\lambda/(\mu_1\sigma_1) < 1$.

Baxılan PQIS/RC/VSO modelinin stasionar ehtimallarının və keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması üçün Gillespie's Direct simulyasiya alqoritminin tətbiqini nəzərdən keçirək:

1. Sistemin ümumi T simulyasiya müddəti müəyyən edilir, cari keçmiş vaxt $t = 0$ qəbul edilir;
2. İlkin vəziyyət x (3.1.1) vəziyyətlər fəzasından təsadüfi şəkildə seçilir və ya 0 qəbul edilir;
3. Cari x vəziyyətindən bütün mümkün keçid intensivliklərinin cəmi hesablanır: $Q = \sum_{x_i \in E} q(x, x_i)$;
4. Q parametrli eksponensial təsadüfi kəmiyyətin simulyasiyasından növbəti Δt müddəti tapılır;
5. Standart bircins paylanmış təsadüfi kəmiyyətin simulyasiyasından təsadüfi r ədədi seçilir;
6. Δt və r kəmiyyətləri seçildikdən sonra sistemin növbəti vəziyyəti x_n rekursiv qaydada müəyyən olunur:
 - a. $0 < r < q(x, x_0)/Q$ olarsa, $x = x_0$;
 - b. $q(x, x_0)/Q < r < (q(x, x_0) + q(x, x_1))/Q$ olarsa, $x = x_1$;
 - c. ...
 - d. $\sum_{i=0}^{n-1} q(x, x_i)/Q < r < \sum_{i=0}^n q(x, x_i)/Q$ olarsa, $x = x_n$;
7. Cari keçmiş vaxt yenilənir: $t = t + \Delta t$;
8. 3-7 addımları $t \leq T$ şərti ödənənə qədər təkrarlanır;
9. Hər bir vəziyyətin stasionar ehtimalı sistemin həmin vəziyyətdə keçirdiyi müddətin ümumi simulyasiya müddətinə nisbəti ilə hesablanır.

Alqoritmdə T simulyasiya müddəti sistemin parameterlərinə uyğun olaraq eksperimental qaydada seçilir. 3-cü addımda Q kəmiyyəti isə (3.2.5), (3.2.6), (3.2.7) düsturları vasitəsilə hesablanır. Hər bir vəziyyətin stasionar paylanması isə sistemin uyğun vəziyyətdə keçirdiyi zamanın (sojourn time) ümumi simulyasiya müddətinə nisbəti kimi ifadə oluna bilər. Stasionar paylanmanı hesabladıqdan sonra (3.1.6), (3.1.7) və (3.2.4) düsturları ilə sistemin keyfiyyət göstəriciləri tapılır.

Cari PQIS/RC/VSO modelin simulyasiyasının python proqramlaşdırma dilində reallaşdırılması Şəkil 3.2.2-də təsvir edilir.

```

1  import random
2  def nextStateSpace(self,m1,n1,k1):
3      nextStateSpace = {}
4      for m2 in (m1, m1 + 1, m1 - 1, 5):
5          for n2 in (n1, n1 + 1, n1 - 1):
6              for k2 in (k1, k1 + 1, k1 - 1):
7                  tr = self.Q_elem(m1, n1, k1, m2, n2, k2)
8                  if tr > 0: nextStateSpace[state] = tr
9      return nextStateSpace
10 def simulate(initialState = 0, simulationTime = 5000):
11     currState = initialState
12     timePassed = 0
13     reachedStates = {} # dict(state: sojournTime)
14     nextStatesAll = {} # dict(state: nextStates)
15     while timePassed < simulationTime:
16         if currState not in reachedStates:
17             reachedStates[currState] = 0
18         if currState not in nextStatesAll:
19             nextStatesAll[currState] = nextStateSpace(currState)
20         nextStates = nextStatesAll[currState]
21         rateSum = sum(nextStates.values()) # transition rate sum
22         nextInterval = random.expovariate(rateSum)
23         r = random.uniform(0,1)
24         prevRateSum = 0
25         for st in nextStates:
26             p_sum = prevRateSum / rateSum
27             n_sum = (prevRateSum + nextStates[st]) / rateSum
28             if r > p_sum and r < n_sum:
29                 reachedStates[currState] += nextInterval
30                 currState = st
31                 break
32             prevRateSum += nextStates[st]
33         timePassed += nextInterval
34     totalTime = sum(reachedStates.values())
35     return {s: reachedStates[s] / totalTime for s in reachedStates}

```

Şəkil 3.2.2 PQIS/RC/VSO modelinin simulyasiyası üçün Gillespie's Direct alqoritminin python proqramlaşdırma dilində reallaşdırılması

Şəkil 3.2.2-də *nextStateSpace* funksiyası cari (m_1, n_1, k_1) vəziyyətindən bütün mümkün digər vəziyyətlərə keçid intensivliklərini hesablayır. Sətir 7-də olan *Q_elem* funksiyası (3.2.5), (3.2.6), (3.2.7) düsturlarına əsasən müəyyən olunur. Sətir 13-də təyin edilən *reachedStates* dəyişəni simulyasiya zamanı sistemin olduğu vəziyyətləri və həmin vəziyyətlərdə sərf etdiyi cəmi müddəti yadda saxlamaq üçün istifadə edilir. Hər bir vəziyyətin stasionar ehtimalı sistemin həmin vəziyyətdə keçirdiyi müddətin ümumi simulyasiya müddətinə nisbəti ilə hesablanır (bax, sətir 34). Sətir 21-də eksponensial paylanmış təsadüfi vaxt aralıqlarını simulyasiya etmək üçün *random.expovariate* funksiyasından istifadə olunur. Standart bircins paylanmış təsadüfi ədəd isə 22-ci sətirdə *random.uniform(0,1)* funksiyası ilə əldə edilir.

Təsvir olunan alqoritm universaldır və istənilən Markov modelləri üçün tətbiq oluna bilər. Bunun üçün yalnız modelin keçid matrisi müəyyən olunmalı və *nextStateSpace* funksiyası keçid matrisinə uyğunlaşdırılmalıdır. *simulate* funksiyası isə dəyişməz qalır və keçid matrisindən və ya digər parametrlərdən asılı deyil.

Beləliklə, PQIS/RC/VSO modeli üçün simulyasiya alqoritm təqdim olundu. Dissertasiyanın davamında təsvir olunan metod ədədi eksperimentlər zamanı istifadə ediləcək.

3.3. Ədədi eksperimentlər

Bu paragrafda öncə təqdim olunmuş PQIS/DFB, PQIS/RC və PQIS/RC/VSO modelləri üçün aparılmış ədədi eksperimentlərin nəticələri təqdim olunacaq və təhlil ediləcək. Təqribi alqoritmlərin dəqiqliyi, QoS göstəricilərinin sistem parametrlərindən asılılığı və optimallaşdırma məsələləri analiz olunacaq.

3.3.1. Təqribi alqoritm dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi

PQIS/DFB modelinin sonlu növbəli və orbitli halı üçün iyerarxiyalı fəza iriləşdirilməsi alqoritmində dəqiqliyini qiymətləndirək. Bunun üçün təqribi nəticələri keçid matrisinə uyğun balans tənliklər sisteminin həllindən tapılmış nəticələrlə

müqayisə edəcəyik. Müqayisənin nəticələri Cədvəl 3.3.1-də təqdim olunur. Təqdim olunan cədvəldə $\|N\|_1$ cosinus normasını, $\|N\|_2$ maksimum mütləq fərqi və $\|N\|_3$ isə Evklid normalarını işarələmək üçün istifadə olunur. Dəqiqliyin ölçülməsi zamanı sistem parametrləri aşağıdakı qaydada seçilmişdir:

$$\mu_1 = 55, \mu_2 = 5, \gamma = 2, \nu = 1, \tau = 1.5, \sigma_1 = 0.3, \sigma_2 = 0.5, \phi_1 = 0.3 \quad (3.3.1)$$

Cədvəl 3.3.1 PQIS/DFB modelində stasionar ehtimalların dəqiqliyi

(S, N)	(s, R)	(λ, η)	Normalar		
			$\ N\ _1$	$\ N\ _2$	$\ N\ _3$
(10,10)	(1,2)	(55,5)	0.98964	0.01834	0.00201
	(2,3)	(60,10)	0.98955	0.02042	0.00200
	(4,4)	(65,15)	0.98989	0.01731	0.00194
(10,15)	(1,2)	(55,5)	0.98373	0.01826	0.00154
	(2,3)	(60,10)	0.98456	0.02037	0.00149
	(4,4)	(65,15)	0.98595	0.01726	0.00141
(15,10)	(2,2)	(55,5)	0.95934	0.01823	0.00173
	(5,3)	(60,10)	0.96858	0.02034	0.00154
	(7,4)	(65,15)	0.97482	0.01721	0.00138
(15,15)	(2,2)	(55,5)	0.98686	0.01312	0.00164
	(5,3)	(60,10)	0.98900	0.01207	0.00148
	(7,4)	(65,15)	0.98996	0.01194	0.00141
(20,5)	(2,2)	(55,5)	0.98019	0.01306	0.00124
	(5,3)	(60,10)	0.98423	0.01203	0.00111
	(9,4)	(65,15)	0.98629	0.01190	0.00103
(20,10)	(2,2)	(55,5)	0.95863	0.01303	0.00129
	(5,3)	(60,10)	0.97068	0.01308	0.00110
	(9,4)	(65,15)	0.97645	0.01297	0.00099

Cədvəl 3.3.1-dən göründüyü kimi S , N və R parametrlərinin həm kiçik, həm də böyük qiymətlərində təqribi alqoritm vasitəsilə kifayət qədər dəqiq nəticələr alınır. Əlavə olaraq, sistemin ölçüsü artdıqca $\|N\|_3$ Evklid normasının qiyməti də azalır. Təqdim olunan nəticələrə əsasən iri ölçülü modellərin stasionar ehtimallarının hesablanması üçün fəza iriləşdirilməsi alqoritmı praktiki cəhətdən çox effektiv tətbiq oluna bilər.

Anbar prosesləri və sorğulara xidmətlə əlaqəli keyfiyyət göstəricilərinin dəqiqliyinin təhlili isə uyğun olaraq Cədvəl 3.3.2 və Cədvəl 3.3.3-də təqdim olunmuşdur.

Cədvəl 3.3.2 PQIS/DFB modelində anbarla əlaqəli QoS göstəricilərin dəqiqliyi

(S, N)	(s, R, λ, η)	S_{av}		RR		Γ_{av}	
		DQ	TQ	DQ	TQ	DQ	TQ
(10,15)	(1,2,55,5)	2.257	2.641	0.536	0.509	3.279	4.010
	(2,3,60,10)	2.329	2.850	0.622	0.577	3.385	4.375
	(4,4,65,15)	2.236	2.823	0.798	0.722	3.196	4.300
(15,10)	(2,2,55,5)	3.396	4.165	0.549	0.511	5.434	6.926
	(5,3,60,10)	3.459	4.397	0.727	0.654	5.520	7.335
	(7,4,65,15)	3.265	4.181	0.860	0.766	5.146	6.912
(15,15)	(2,2,55,5)	3.396	4.165	0.549	0.511	5.434	6.926
	(5,3,60,10)	3.459	4.397	0.727	0.654	5.520	7.335
	(7,4,65,15)	3.265	4.181	0.860	0.766	5.146	6.912
(20,5)	(2,2,55,5)	4.387	5.390	0.507	0.473	7.371	9.336
	(5,3,60,10)	4.661	5.937	0.646	0.583	7.859	10.359
	(9,4,65,15)	4.425	5.689	0.838	0.743	7.389	9.856
(20,10)	(2,2,55,5)	4.387	5.390	0.507	0.473	7.366	9.333
	(5,3,60,10)	4.660	5.937	0.646	0.584	7.855	10.357
	(9,4,65,15)	4.425	5.689	0.838	0.743	7.387	9.854

Cədvəl 3.3.3 PQIS/DFB modelində sorğularla əlaqəli QoS göstəricilərin dəqiqliyi

(S, N)	(s, R, λ, η)	L_s		L_o		RL	
		DQ	TQ	DQ	TQ	DQ	TQ
(10,10)	(1,2,55,5)	8.993	9.053	0.524	0.583	43.979	43.716
	(2,3,60,10)	9.133	9.202	0.317	0.301	47.957	46.855
	(4,4,65,15)	9.228	9.301	0.230	0.186	52.891	51.684
(10,15)	(1,2,55,5)	13.185	13.037	0.506	0.583	43.918	41.681
	(2,3,60,10)	13.457	13.391	0.307	0.301	47.934	44.876
	(4,4,65,15)	13.635	13.624	0.224	0.186	52.876	49.696
(15,10)	(2,2,55,5)	9.071	9.146	0.524	0.583	43.872	40.477
	(5,3,60,10)	9.203	9.284	0.316	0.301	47.932	43.564
	(7,4,65,15)	9.281	9.359	0.230	0.186	52.876	48.258
(15,15)	(2,2,55,5)	13.394	13.313	0.510	0.583	42.865	43.239
	(5,3,60,10)	13.644	13.633	0.309	0.301	46.770	46.213
	(7,4,65,15)	13.776	13.791	0.225	0.186	51.871	51.174
(20,5)	(2,2,55,5)	4.450	4.535	0.532	0.582	42.806	41.568
	(5,3,60,10)	4.514	4.590	0.320	0.301	46.743	44.620
	(9,4,65,15)	4.562	4.630	0.232	0.186	51.854	49.503
(20,10)	(2,2,55,5)	9.101	9.177	0.524	0.583	42.766	40.580
	(5,3,60,10)	9.240	9.320	0.316	0.301	46.741	43.566
	(9,4,65,15)	9.320	9.399	0.230	0.186	51.854	48.297

Təqdim olunan cədvəllərdə DQ dəqiq, TQ isə təqribi qiyməti işarələmək üçün istifadə olunur. Dəqiq qiymətlər keçid matrisinə uyğun balans tənliklərinin həllindən, təqribi qiymətlər isə təqribi düsturlar vasitəsilə hesablanmışdır.

3.3.2. Keyfiyyət göstəricilərinin sistem parametrlərinə görə müqayisəli analizi

PQIS/DFB modelinin növbə və orbit komponentlərinə nəzərən iki halı üçün QoS-ların müqayisəli analizinə baxılmışdır.

1. Sonlu növbəli və sonsuz orbiti olan hal: $N < \infty, R = \infty$.
2. Sonsuz növbəli və sonlu orbiti olan hal: $N = \infty, R < \infty$.

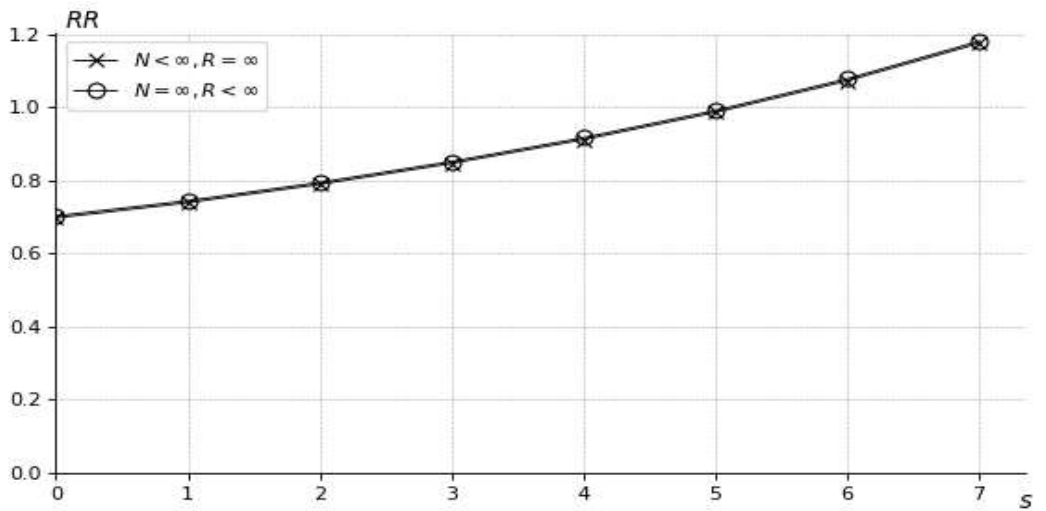
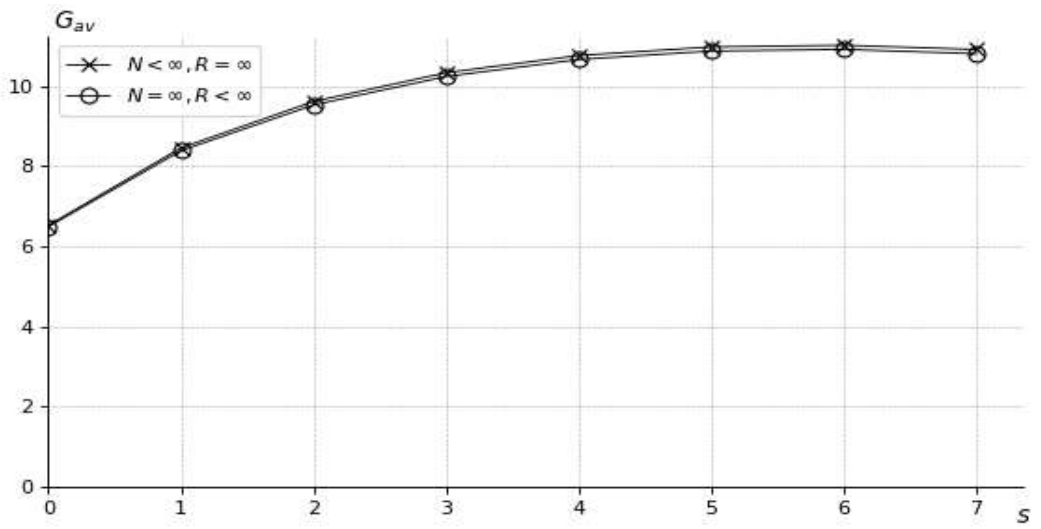
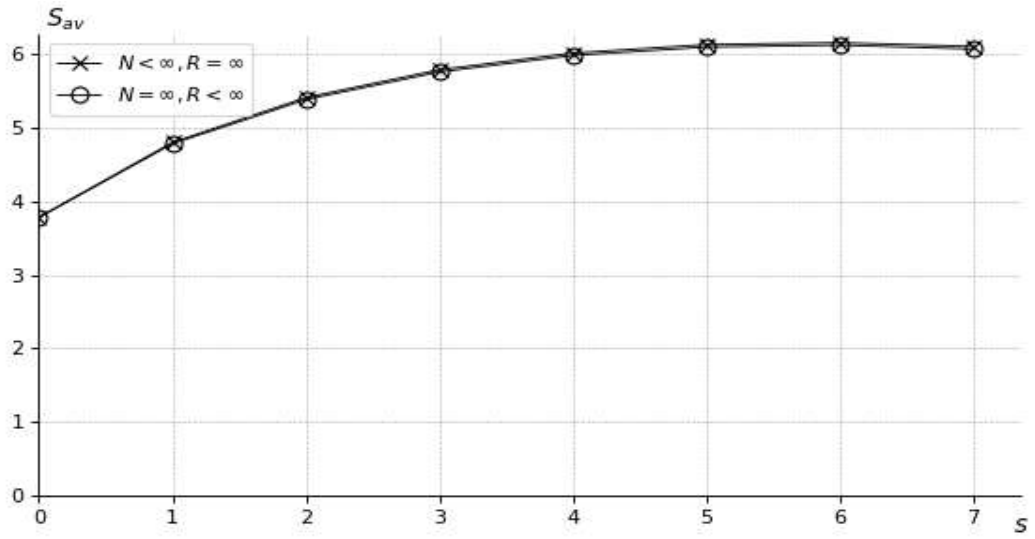
Ədədi eksperimentlər zamanı sistem parametrlərinin qiymətləri aşağıdakı qaydada seçilmişdir:

$$\lambda = 10, \eta = 5, \mu_1 = 60, \mu_2 = 15, \gamma = 2, \nu = 2, \tau = 1.5, \quad (3.2.8)$$

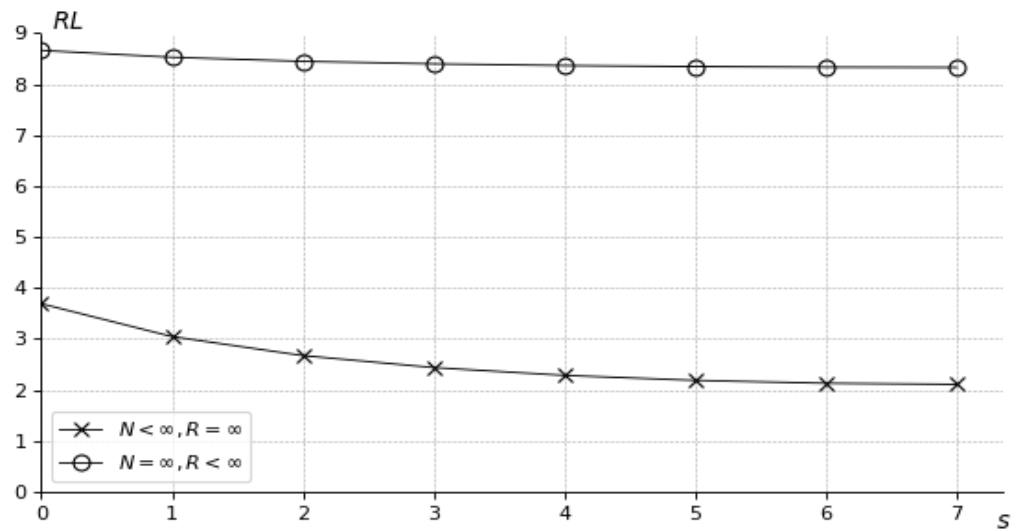
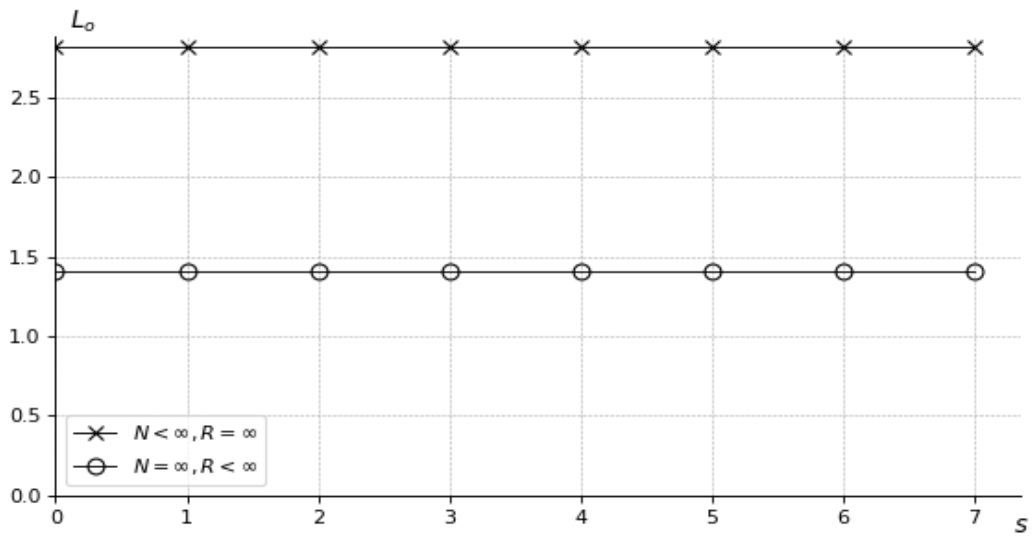
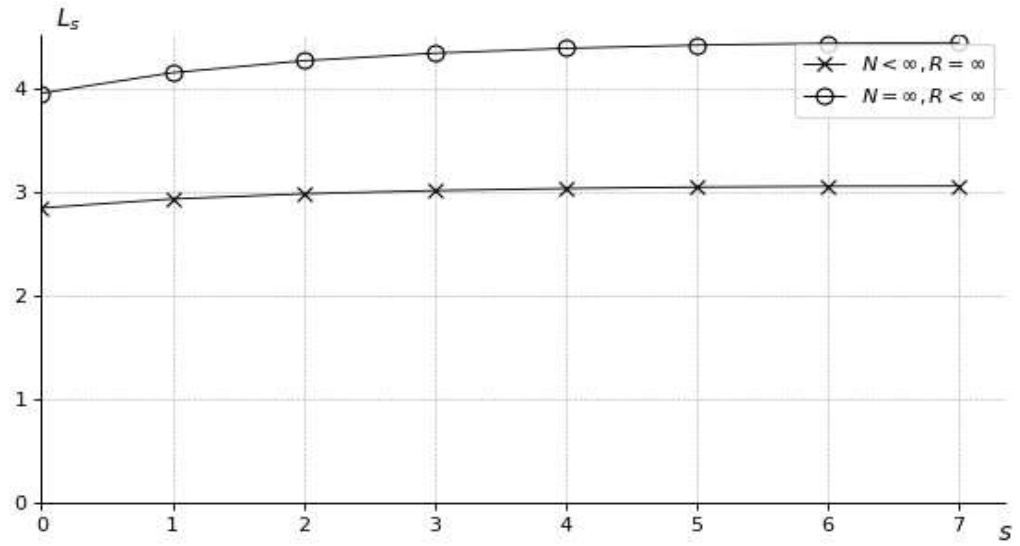
$$\sigma_1 = 0.2, \sigma_2 = 0.5, \phi_1 = 0.3, S = 15$$

Əlavə olaraq, sonlu növbəli halda $N = 10$, sonlu orbitli halda isə $R = 2$ qəbul edilir. Eksperiment zamanı keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması üçün fəza iriləşdirilməsi alqoritmindən istifadə olunmuşdur. Eksperimentin nəticələri Qrafik 3.3.1 və Qrafik 3.3.2-də təqdim olunur. Bütün qrafiklərdə 1-ci və 2-ci halı təsvir edən əyriyə uyğun olaraq x və o ilə işarələnmişdir.

Anbar prosesləri əlaqəli QoS göstəricilərinin müqayisəsi Qrafik 3.3.1-də təsvir edilir. Şəkildən görüldüyü kimi S_{av} anbarın orta səviyyəsi, RR EA tələbinin orta yerləşdirilmə intensivliyi, Γ_{av} anbarın orta xarab olma intensivliyi hər iki halda, demək olar ki, üst-üstə düşür. Bu nəticə onunla izah olunur ki, bu QoS-lar yalnız anbarın səviyyəsindən asılıdır və növbənin və ya orbitin ölçüsü bu göstəricilərə təsir etmir. Digər tərəfdən, s EA həddi artdıqca RR kəmiyyəti də, təbii olaraq, artır. RR kəmiyyətinin artması, öz növbəsində, anbarın orta səviyyəsinin qalxmasına səbəb olur. Əlavə olaraq, qrafiklərdən görüldüyü kimi $\Gamma_{av} \approx \gamma S_{av}$ münasibəti də ödənilir.



Qrafik 3.3.1 Anbar prosesləri ilə əlaqəli QoS göstəricilərinin müqayisəsi



Qrafik 3.3.2 Sorğulara xidmətlə əlaqəli QoS göstəricilərinin müqayisəsi

Sorğulara xidmətlə əlaqəli QoS göstəricilərin müqayisəsi Qrafik 3.3.2-də təqdim olunur. Qrafiklərdən görüldüyü kimi, intuitiv olaraq, növbənin L_s və orbitin L_o orta

uzunluğu uyğun qaydada $N = \infty$ və $R = \infty$ halları üçün daha yüksək qiymətlər alır. Sorğuların orta itmə intensivliyi RL isə orbit sonlu olan hal üçün daha yüksəkdir. Buna səbəb isə (3.1.8) düsturlarındakı RL_o komponentinin $R = \infty$ halı üçün sıfıra bərabər olmasıdır. Ekperiment zamanı daxilolma intensivliyi xidmət intensivliklərinə nəzərən kiçik seçildiyindən növbənin dolması səbəbindən itmə ehtimalı da (növbənin məhdud və ya qeyri-məhdud halından asılı olmayaraq) az olur və (3.1.8) düsturlarında RL_p kəmiyyətinin təsiri azalır.

3.3.3. Təqribi düsturların simulyasiya nəticələri ilə müqayisəli analizi

Bu bölmədə sonsuz PQIS/RC modeli üçün təqdim olunan (3.2.3) düsturlarının nəticələri simulyasiya nəticələri ilə müqayisə ediləcək.

Ədədi eksperimentlər zamanı sistem parametrləri aşağıdakı qaydada seçilmişdir:

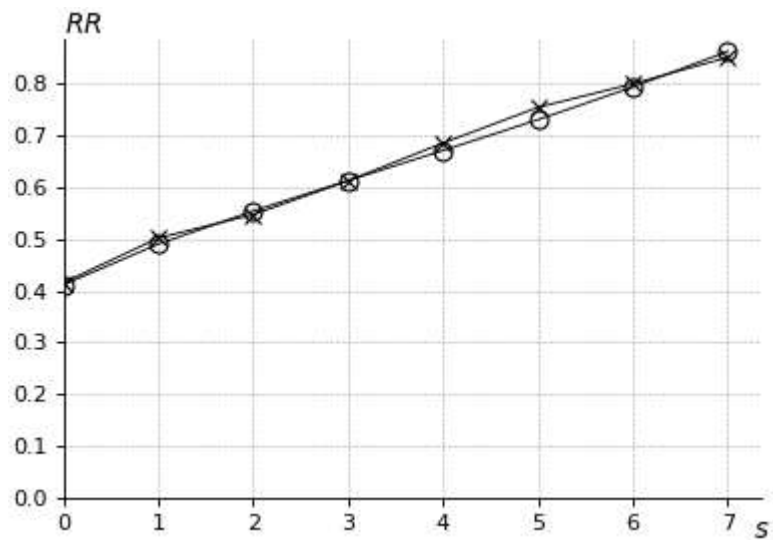
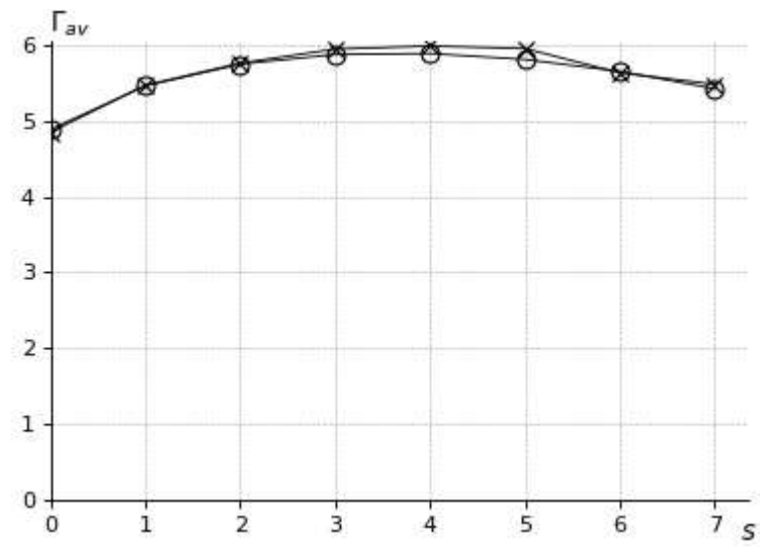
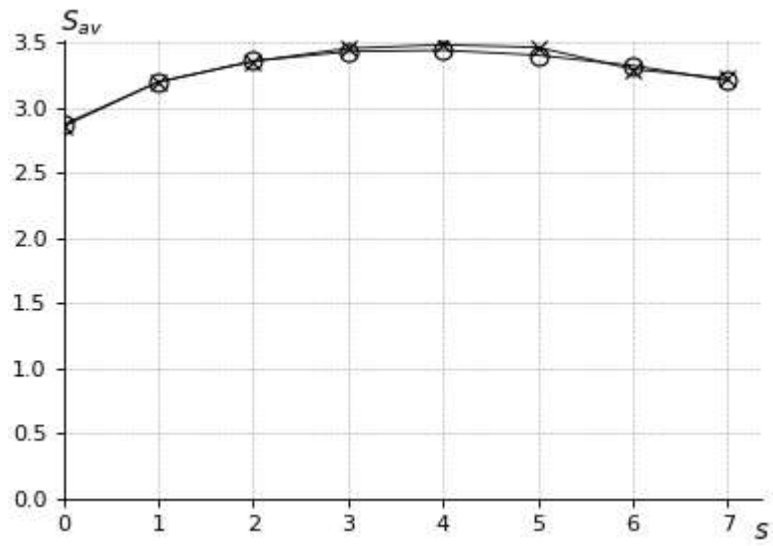
$$\lambda = 20, \eta = 5, \mu_1 = 60, \mu_2 = 10, \gamma = 2, \nu = 2, \tau = 1.5, \quad (3.3.2)$$

$$\sigma_1 = 0.4, \phi_1 = 0.3, S = 15$$

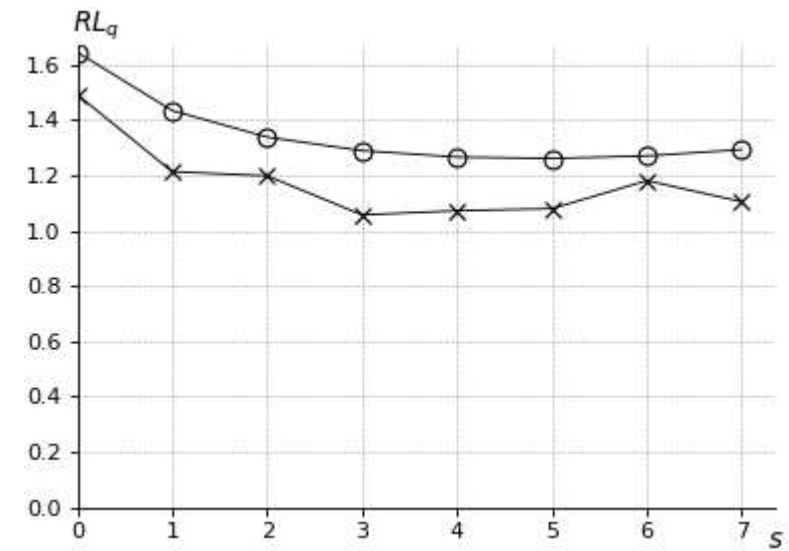
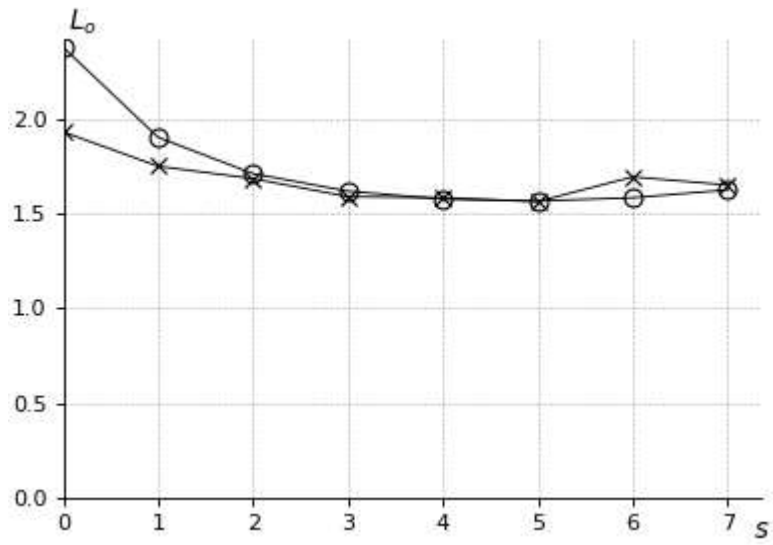
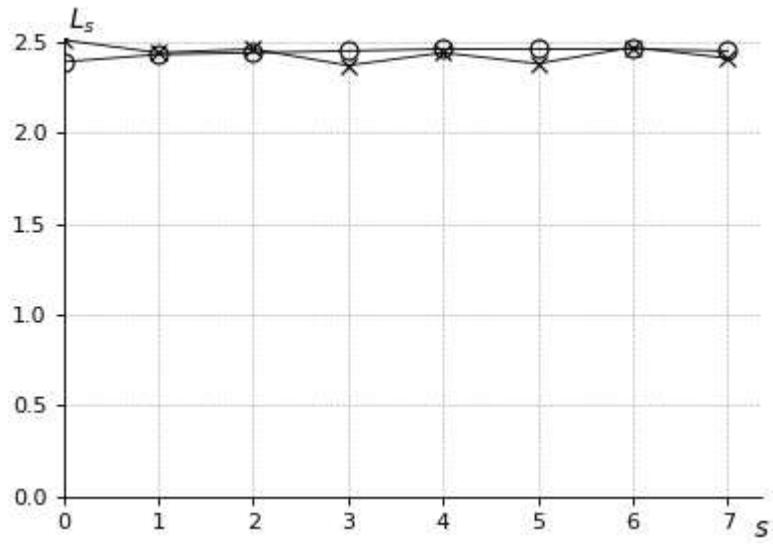
Müqayisəli analizin nəticələri **Qrafik 3.3.3** və **Qrafik 3.3.4**-də təsvir olunur. Şəkillərdə x və o uyğun olaraq təqribi və simulyasiya üsulları ilə hesablanmış nəticələrin ayrılıqlarını ifadə edir.

Anbar prosesləri ilə əlaqəli keyfiyyət göstəricilərinin müqayisəsi **Qrafik 3.3.3**-də cəmlənmişdir. S_{av} , RR , Γ_{av} kəmiyyətləri üçün təqribi və simulyasiya metodlarının nəticələri demək olar ki, eynidir və maksimal mütləq fərqlər uyğun olaraq 0,007, 0,012 və 0,023-ə bərabərdir.

Qrafik 3.3.4-dən sorğulara xidmətlə əlaqəli QoS göstəriciləri üçün də yüksək dəqiqlik müşahidə olunsada, L_o kəmiyyəti üçün çox da böyük olmayan xəta mövcuddur. L_s , L_o və RL_q QoS-ları üçün maksimal mütləq xətalər uyğun olaraq 0,048, 0,193 və 0,182-ə bərabərdir.



Qrafik 3.3.3 PQIS/RC modeli üçün anbar prosesləri ilə əlaqəli QoS göstəricilərinin təqribi və simulyasiya üsulları ilə qiymətlərinin müqayisəsi

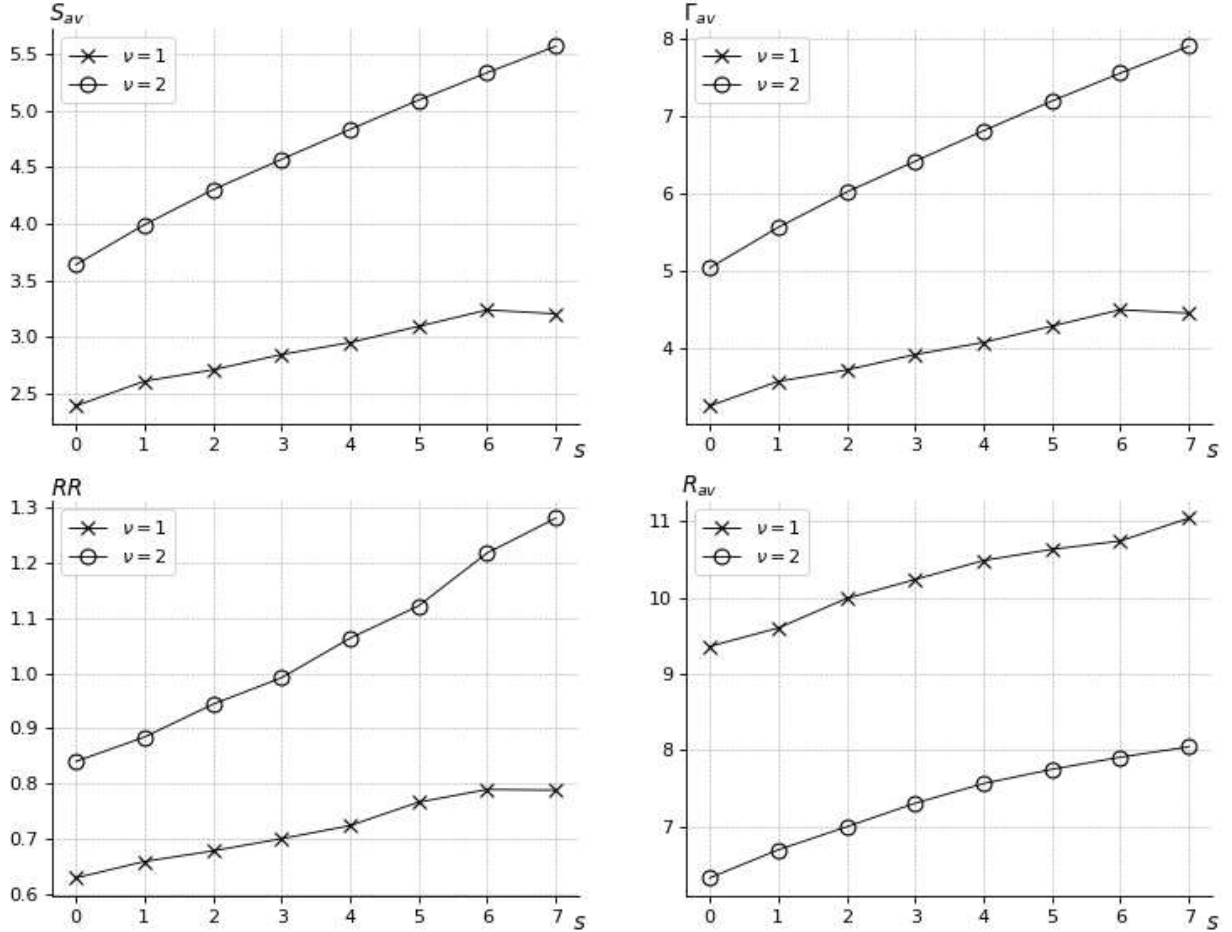


Qrafik 3.3.4 PQIS/RC modeli üçün sorğulara xidmətlə əlaqəli QoS göstəricilərinin təqribi və simulyasiya üsulları ilə qiymətlərinin müqayisəsi

Beləliklə, təqribi alqoritminin sonsuz modellər üçün yüksək dəqiqliyi nümayiş olundu.

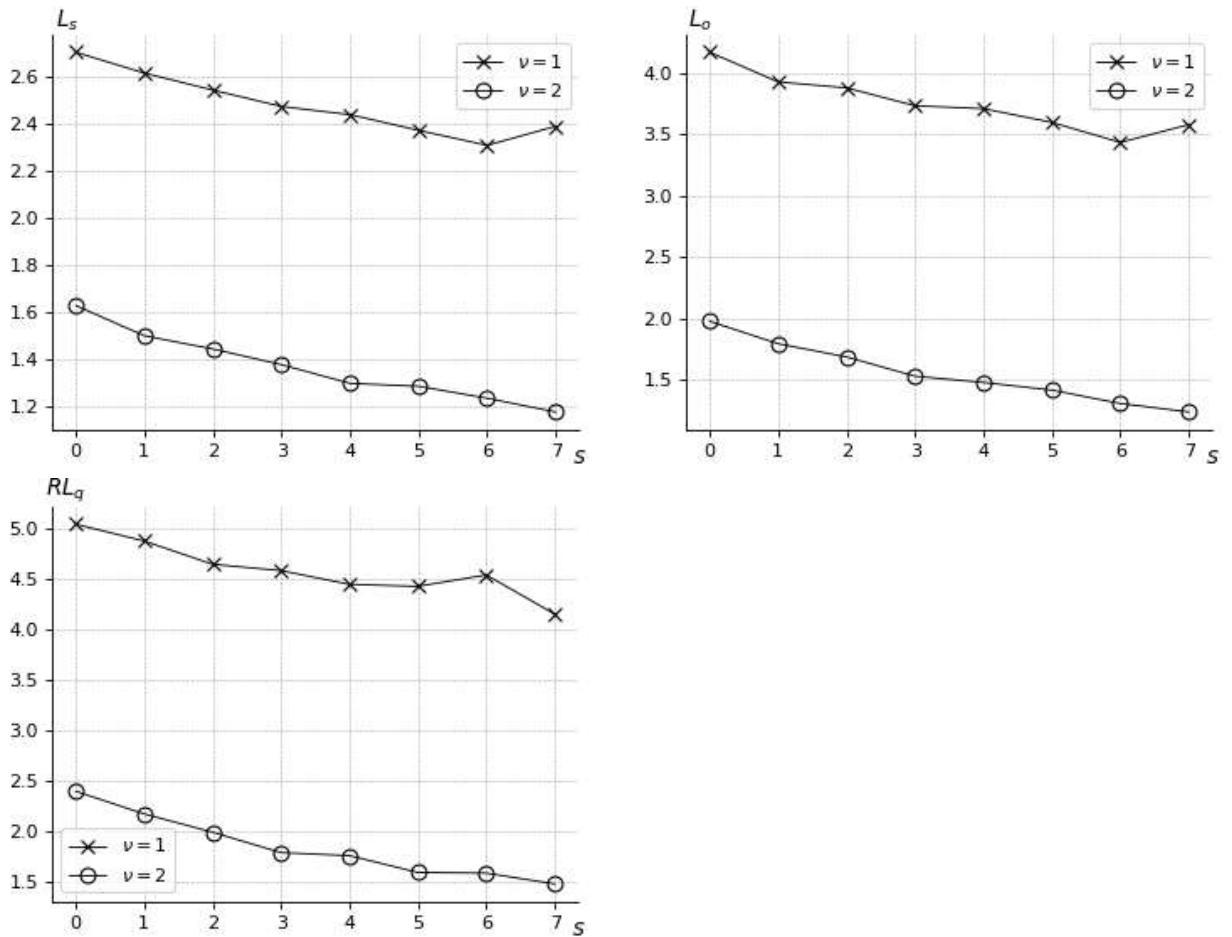
3.3.4. Keyfiyyət göstəricilərinin EA tələbinin icra intensivliyindən asılılığı

PQIS/RC/VSO modeli üçün QoS-ların ν EA tələbinin icra intensivliyindən asılılığını təhlil edək. Təhlilin nəticələri Qrafik 3.3.5 və Qrafik 3.3.6-da təqdim olunmuşdur.



Qrafik 3.3.5 PQIS/RC/VSO modeli üçün anbar prosesləri ilə əlaqəli QoS göstəricilərin asılılıq qrafikləri

Qrafik 3.3.5-dən görüldüyü kimi s EA həddi artdıqca S_{av} anbar ehtiyatı da xətti olaraq artır. Bu onunla izah olunur ki, s artıqda orta EA tələbinin yerləşdirilmə intensivliyi RR də, öz növbəsində, artır və anbar ehtiyatının daha intensiv artırılmasına səbəb olur. Əlavə olaraq, $\Gamma_{av} \approx \gamma S_{av}$ şərtləri də ödənilir. S_{av} , Γ_{av} və RR QoS-ları icra intensivliyinə mütənasib olduğu halda, R_{av} orta EA həcmi ν parametrini artırıdıqda azalır. Çünki, EA icra intensivliyi artdıqda EA tələbinin icra olunma vaxtı azalır və anbarın səviyyəsinin daha az sürətlə aşağı düşməsinə səbəb olur.



Qrafik 3.3.6 PQIS/RC/VSO modeli üçün sorğulara xidmətlə əlaqəli QoS göstəricilərin asılılıq qrafikləri

Qrafik 3.3.6-dan isə EA həddi artıqda növbənin və orbitin ölçüsünün azaldığının şahidi oluruq. Buna səbəb, s artıqda orta anbar səviyyəsinin artması, anbarın boş olma ehtimalının azalması və nəticədə, daha çox sorğunun xidmət olunmasıdır. Eyni zamanda, orta anbar səviyyəsi artıqda anbarın boş olma ehtimalı azalır və nəticədə, RL_q sorğuların itmə intensivliyi aşağı düşür.

Beləliklə, PQIS/DFB və PQIS/RC modelləri üçün fəza iriləşdirilməsi alqoritminin dəqiqliyini və QoS göstəricilərin davranışını təhlil etdik. Ədədi eksperimentlərin nəticələri haqqında daha ətraflı məlumatı [60, s.98-109, 61, s.107-110, 71, s.46-49] məqalələrindən əldə etmək olar.

3.3.5. Optimallaşdırma məsələlərinin həlli

PQIS/DFB və PQIS/RC sonsuz modelləri üçün məqsəd funksiyasının EA həddi və EA tələbinin icra olunması intensivliyinə nəzərən minimallaşdırılma məsələlərinə

baxaq. Məsələlərin həlli zamanı öncə təqdim olunan (3.2.3) təqribi düsturlarından istifadə ediləcək.

PQIS/DFB modeli üçün optimallaşdırılacaq məqsəd funskiyasını aşağıdakı qaydada müəyyən edək:

$$TC(d, s) = (K + c_r(S - s))RR + c_s S_{av} + c_p \Gamma_{av} + c_l RL + c_{ws} L_s + c_{wo} L_o \quad (3.3.3)$$

Burada K – EA tələbinin birdəfəlik icra olunma məsrəfi,

c_r – EA tələbinin vahid ehtiyat üçün daşınma məsrəfi,

c_s – anbarda vahid ehtiyatın saxlanma məsrəfi,

c_p – anbarda vahid ehtiyatın xarab olma məsrəfi,

c_l – sorğunun itmə məsrəfi,

c_{ws} – növbədə vahid sorğunun gözləmə məsrəfi,

c_{wo} – orbitdə vahid sorğunun gözləmə məsrəfi.

(3.3.3) optimallaşdırma məsələsini həll etmək üçün fərz olunur ki, EA tələbini yerinə yetirəcək müxtəlif təchizatçılar mövcuddur və icra intensivliyindən asılı olaraq müxtəlif qiymət siyasətlərinə məxsusdur. Belə ki, $d: d = 0, \dots, D$ nömrəli EA xidmətinin intensivliyi və qiymət siyasəti (ν, K, c_r) ilə işarə olunur. Məsələnin qoyuluşu isə (3.3.3) ilə müəyyən olunan TC məqsəd funskiyasını minimallaşdıran (d, s) cütlüyünü tapmaqla sistemin stasionar halda işləməsini optimallaşdırmaqdan və onun keyfiyyət göstəricilərini yaxşılaşdırmaqdan ibarətdir.

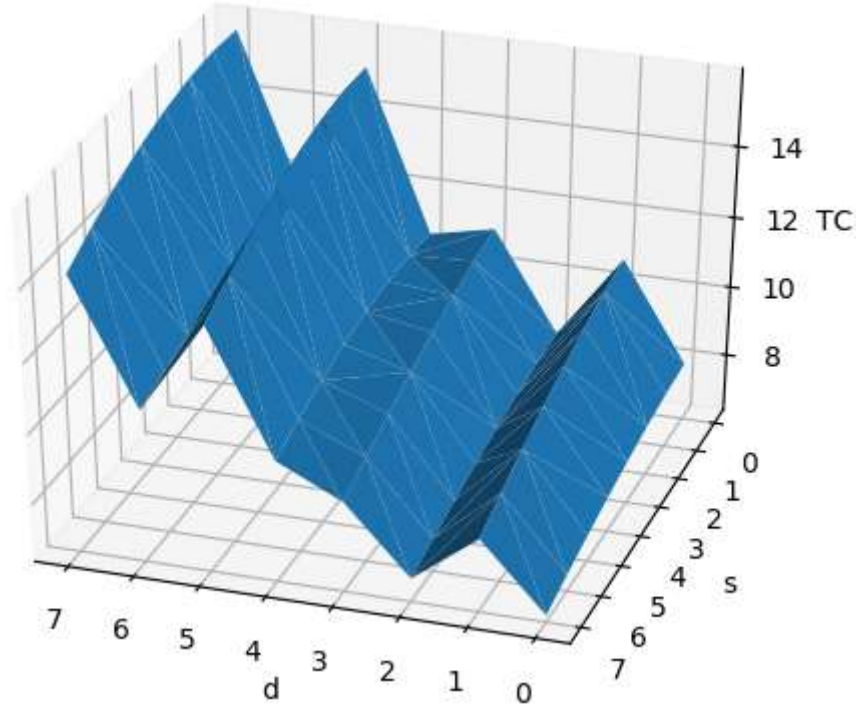
Qeyd edək ki, eksperiment zamanı sistemin parametrlərinin və optimallaşdırma əmsallarının qiymətləri aşağıdakı kimi seçilmişdir:

$$\begin{aligned} c_s = 0.5, c_p = 0.5, c_l = 0.5, c_{ws} = 0.2, c_{wo} = 0.1, \\ \lambda = 5, \eta = 10, \gamma = 2, S = 15, \tau = 0.5, \sigma_1 = 0.2, \\ \sigma_2 = 0.7, \phi_1 = 0.4, \mu_1 = 50, \mu_2 = 30 \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Ekspperimentdə istifadə olunan mövcud təchizatçılar bunlardır ($D = 7$):

$$\{(0.5, 1, 0.5), (0.5, 1, 1), (0.5, 2, 0.5), (0.5, 2, 1), (1, 1, 0.5), (1, 1, 1), (1, 2, 0.5), (1, 2, 1)\} \quad (3.3.5)$$

(3.3.3) məsələsini həll etmək üçün optimal (s, d) cütünü mümkün həllər çoxluğu diskret sonlu olduğundan tam seçmə (brute force) üsulu ilə tapılır. Eksperimentin nəticəsi Qrafik 3.3.7-də təqdim olunmuşdur.



Qrafik 3.3.7 PQIS/DFB modeli üçün optimallaşdırma məsələsinin həlli

Qrafik 3.3.7-dən görüldüyü kimi TC funksiyası öz minimal qiymətini $s = 0, d = 7$ nöqtəsində alır və uyğun olaraq, $TC(0,7) = 6.56$.

(3.3.3) məsələsinin həlli seçilmiş parametrlərdən asılı olsa da, ümumilikdə, EA həddi s sıfır olduqda S_{av} və RR kəmiyyətləri azalır və nəticədə, anbar prosesləri ilə əlaqəli məsrəf azalmış olur. Yüksək icra intensivliyinin seçilməsi isə anbar ehtiyatının olmaması və sorğu itkisi ehtimalını azaltmaqla sorğuların itməsindən yaranan məsrəfi azaldır.

Qeyd edək ki, (3.3.3) məsələsinin həlli zamanı fəza iriləşdirilməsi metodu və Gillespie's Direct simulyasiyası identik nəticələr qaytarır ki, bu da təqribi düsturların yüksək dəqiqliyini bir daha isbat etmiş olur.

PQIS/RC modeli üçün də TC məqsəd funksiyasını oxşar qaydada müəyyən edək:

$$TC(s) = (K + c_r(S - s))RR + c_s S_{av} + c_p \Gamma_{av} + c_l RL_q + c_w(L_s + L_o) \quad (3.3.6)$$

(3.3.3) məsələsindən fərqli olaraq burada yalnız EA həddindən asılı funksiya baxılır və c_{ws} , c_{wo} əmsallarının əvəzinə yeganə c_w sorğuların sistemdə gözləmə əmsalı dəyişəni daxil edilir.

Məsələnin qoyuluşu isə EA həddinin TC məqsəd funksiyasını minimallaşdıran qiymətini tapmaqdan ibarətdir və riyazi olaraq aşağıdakı şəkildə təsvir edilir:

$$s^* = \operatorname{argmin}\{TC(s): 0 \leq s \leq s'\} \quad (3.3.7)$$

$$\text{Burada } s' = \begin{cases} \left\lceil \frac{S}{2} \right\rceil & \text{əgər } S \text{ tək ədəd olarsa} \\ \frac{S}{2} - 1 & \text{əgər } S \text{ cüt ədəd olarsa} \end{cases}, [x] - x \text{ ədəddinin tam hissəsidir.}$$

(3.3.6) və (3.3.7) məsələsinin həllər çoxluğu sonlu diskret olduğundan optimal s parametrinin tapılması üçün tam seçmə (brute force) üsulundan istifadə edilir. QoS göstəricilərin hesablanması üçün (3.2.3) təqribi düsturlarından istifadə olunur.

Məsələnin həlli zamanı cərimə əmsalları və sistem parametrləri aşağıdakı növbəti müəyyən olunur:

$$\begin{aligned} c_s &= 0.5, c_p = 0.2, c_l = 2.0, c_w = 1, \\ \lambda &= 20, \eta = 5, \gamma = 2, S = 15, \tau = 1.5, \psi_1 = 0.8, \\ \sigma_1 &= 0.4, \phi_1 = 0.4, \mu_1 = 60, \mu_2 = 10 \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Fərz olunur ki, sistem EA tələbini müxtəlif təchizatçılara sifariş edə bilər. Hər bir təchizatçının EA tələbini yerinə yetirmə intensivliyi və qiyməti fərqlidir. Əlavə olaraq, icra intensivliyi yüksək olan təchizatçı daha baha başa gəlir.

Müxtəlif icra intensivliklərinə nəzərən (3.3.6) və (3.3.7) məsələsinin həlli cədvəl Cədvəl 3.3.4-də təqdim olunur. Cədvələ əsasən seçilmiş parametrlərə görə 2 nömrəli təchizatçının xidmətindən istifadə etmək daha sərfəlidir. Əlavə olaraq, belə nəticəyə gəlirik ki, icra olunma intensivliyinin yüksək qiymətlərində optimal EA həddi sabit qalır. Yəni, daha “sürətli” təchizatçıları seçməklə EA həddinin minimal saxlamaq olar.

Cədvəl 3.3.4 (3.3.6) və (3.3.7) məsələsinin həlli

Təchizatçı №	ν	(K, c_r)	s^*	TC^*
1	0,5	(2; 0,1)	6	22,92385

2	1	(3; 0,1)	5	20,26252
3	1,5	(4,5; 0,15)	1	21,09278
4	2	(5; 0,2)	1	21,83515
5	2,5	(5,5; 0,2)	0	21,95194
6	3	(7; 0,35)	0	25,28343

Beləliklə, PQIS/DFB və PQIS/RC modelləri üçün məqsəd funksiyaları təqdim olundu və uyğun optimallaşdırma məsələləri həll edildi.

3.4. Üçüncü fəslin nəticələri

Orbit komponentinin istifadə məqsədinə nəzərən üçölçülü gecikən əks əlaqəli və təkrar sorğulu $M/M/1/\infty$ tipli sonsuz EX-KXES modelləri təqdim olunmuşdur. Sistemin riyazi modeli və keçid matrisi qurulmuş, keyfiyyət göstəriciləri müəyyən edilmiş və erqodikliyi isbat olunmuşdur. Təqdim olunan modellərdə stasionar ehtimalların və keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması üçün analitik üsulların olmaması qənaətinə gəlinmiş, simulyasiya və iyeraxiyalı fəza iriləşdirilməsi üsulları tətbiq edilmiş, təqribi düsturlar alınmışdır.

Təqdim olunan modellər üçün ədədi eksperimentlər vasitəsilə alınmış təqribi düsturların dəqiqliyi müqayisəli analizlə isbat edilmişdir. Anbar prosesləri ilə əlaqəli keyfiyyət göstəriciləri üçün maksimal dəqiq nəticələr, sorğulara xidmət ilə əlaqəli keyfiyyət göstəricilər üçün isə praktiki nəzərə alınmayacaq xətlər alınmışdır. Təqribi düsturların böyük ölçülü modellər üçün praktiki əhəmiyyəti və səmərəliliyi göstərilmişdir. Ədədi eksperimentlərin nəticələri qrafik və cədvəl formalarında nümayiş etdirilmişdir.

Gecikən əks əlaqəli model üçün keyfiyyət göstəricilərinin sonsuz növbəli və orbitli hallar üzrə EA həddinə nəzərən müqayisəli analizi təhlil edilmişdir. Anbar prosesləri ilə əlaqəli keyfiyyət göstəricilərinin orbit və növbənin ölçüsündən az asılı olması sorğuların itmə intensivliyinin orbitin məhdud halında daha yüksək olması qənaətinə gəlinmişdir.

Təkrar sorğulu $M/M/1/\infty$ modeli üçün QoS göstəricilərinin EA həddindən və EA tələbinin icra olunma intensivliyindən asılılığı nümayiş etdirilmişdir. Anbar

göstəricilərinin, EA tələbinin orta həcmindən başqa, icra intensivliyinə nəzərən artması və sorğulara xidmətlə əlaqəli göstəricilərin isə azalması müşahidə edilmişdir.

Gecikən əks əlaqəli model üçün məqsəd funksiyası təqdim olunmuşdur. Məqsəd funksiyasının təchizatçı seçimi və anbar ehtiyatlarının kritik həddinə nəzərən minimallaşdırılması məsələsinə baxılmışdır. Seçilmiş parametrlərə və əmsallara nəzərən təqribi düsturlar vasitəsilə məsələ tam seçmə üsulu ilə həll olunmuşdur. Ümumi halda, sistemin optimallaşdırılması üçün EA həddinin minimal, icra olunma intensivliyinin isə maksimal seçilməsi qənaətinə gəlinmişdir.

Təkrar sorğulu $M/M/1/\infty$ modeli üçün EA həddindən asılı məqsəd funksiyası müəyyən olunmuşdur. Optimallaşdırma məsələsinin riyazi qoyuluşu təqdim edilmişdir. Məsələ təqribi düsturlar vasitəsilə müxtəlif icra intensivlikləri olan təchizatçılara nəzərən həll edilmişdir. İcra intensivliyinin yüksək qiymətlərində optimal kritik həddin dəyişməməsi və minimal kritik həddin daha “sürətli” təchizatçıları seçməklə təmin olunması nəticəsi alınmışdır.

Ədədi eksperimentlərin aparılması üçün uyğun proqram təminatları yaradılmışdır.

Üçüncü fəslin əsas nəticələri [60, 61, 67, 87] məqalələrində çap olunmuşdur.

Nəticə

1. Mövcüd elmi ədəbiyyatın analizinin nəticələri təhlil edilmişdir. KXES-lərin riyazi modelləşdirilməsi üçün Markov zəncirlərinin tətbiq edilməsi göstərilmişdir. Stasionar paylanmanın və keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması üçün dəqiq, təqribi və simulyasiya alqoritmləri müqayisə edilmiş, üstün və çatışmayan cəhətləri təhlil olunmuş, dəqiq üsullardan spektral genişlənmə, təqribi üsullardan fəza iriləşdirilməsi, simulyasiya üsullarından isə Gillespie Direct metodunun səmərəliliyi göstərilmişdir. KXES modellərinin analizi zamanı aparılan ədədi eksperimentlərin, həmçinin optimallaşdırma məsələlərinin növləri xülasə edilmişdir. Qeyd edilmişdir ki, KXES modellərinin təhlili zamanı stasionar paylanmanın və keyfiyyət göstəricilərinin hesablanmasında, ədədi eksperimentlərin aparılmasında əsas məqsəd sistemin uzun müddətli davranışını öyrənməklə optimallaşdırılmasıdır.

2. Müxtəlif tipli sorğulu modellərin son illərdə dərc olunan işlərdə rast gəlinməsi və ehtiyatları xarab olan sistemlərə ümumiyyətlə tətbiq edilməməsi qeyd edilmiş və yeni müxtəlif sorğulu EX-KXES modelləri təqdim olunmuşdur. Bu tip modellərdə fərz olunur ki, xidməti bitmiş sorğular Bernulli sxeminə əsasən ya ehtiyat əldə edir, ya da sistemi əliboş tərk edir. Təklif olunan modellərin sonlu və sonsuz vəziyyətlər fəzası olan, müxtəlif EA qaydaları tətbiq edilən variasiyalarına baxılmışdır. Hər bir model üçün keçid matrisi qurulmuş və keyfiyyət göstəriciləri müəyyən edilmişdir. Stasionar paylanmanın və keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması üçün dəqiq və təqribi üsullar, həmçinin simulyasiya alqoritmləri yaradılmış və uyğun düsturlar alınmışdır. Qeyd edilmişdir ki, dəqiq üsullar yalnız kiçik ölçülü və sonlu modellər üçün yararlıdır. Fəza iriləşdirilməsi alqoritminin digər üsullara nəzərən praktiki səmərəliliyi və dəqiqliyi ədədi eksperimentlər vasitəsilə nümayiş etdirilmişdir. Keyfiyyət göstəricilərinin sistem parametrlərindən asılılığı və stasionar halda davranışı ədədi eksperimentlər vasitəsilə tədqiq olunmuş və qrafik/cədvəl formalarında təqdim edilmişdir. Nəticədə, xərclərinin azaldılması baxımından (s, S) EA qaydası tətbiq edilən modelinin daha səmərəli olması qənaətinə gəlinmişdir. EA həddinin və EA qaydalarının optimal seçilməsi məsələlərinə baxılmış və uyğun məqsəd funksiyaları daxil edilmişdir. Təqdim edilmiş

optimallaşdırma məsələləri təqribi və simulyasiya üsulları vasitəsilə həll olunmuşdur. EA həddinin EA məsrəfini azaltmaq üçün minimal seçilməsi, MS/(S,S-1) modeli üçün anbar ehtiyatının böyük qiymətlərində sonlu halda aşağı, sonsuz halda isə yuxarı intensivlikli EA xidmətinin seçilməsinin səmərəliliyi bəlli olmuşdur.

3. Əks əlaqəli üçölçülü iki növ EX-KXES modelləri təqdim edilmişdir. Birinci tip modeldə xidməti bitmiş sorğu ehtiyat əldə etmədikdə müəyyən ehtimalla qərar vermək üçün orbitə daxil olur. İkinci tip modeldə isə səbirsiz sorğular, həmçinin daxilolma anında anbarda ehtiyat olmadığından sistemi tərk edən sorğular müəyyən ehtimalla orbitə daxil olub eksponensial paylanmış təsadüfi vaxtdan sonra sistemə təkrar müraciət edir. Təqdim olunan hər bir model uyğun üçölçülü Markov zənciri ilə modelləşdirilmiş, keçid matrisi diaqram və psevdo kodla təsvir edilmiş, modellərin erqodiklik şərtləri göstərilmişdir. Göstərilmişdir ki, modellərin stasionar paylanması və keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması üçün analitik və dəqiq metodlar səmərəli deyil, iyerarxiyalı fəza iriləşdirilməsi alqoritmi tətbiq edilmiş, təqribi düsturlar alınmış və üsulun dəqiqliyi ədədi eksperimentlər vasitəsilə müqayisəli şəkildə isbat olunmuşdur. Keyfiyyət göstəricilərinin davranışı ədədi eksperimentlər vasitəsilə təhlil olunmuş, qrafik və cədvəl şəklində nümayiş etdirilmişdir. Anbar proseslərlə əlaqəli keyfiyyət göstəricilərinin EA icra intensivliyi ilə düz, sorğulara xidmətlə əlaqəli göstəricilərin isə tərs mütənasib olması qənaətinə gəlinmişdir. Anbar prosesləri əlaqəli keyfiyyət göstəricilərinin orbit və növbənin uzunluğundan asılı olmaması göstərilmişdir. Sonsuz ölçülü modellər üçün məqsəd funksiyaları daxil edilmiş və optimallaşdırma məsələləri həll olunmuşdur. Sistemin optimallaşdırılması üçün EA həddinin minimal qalması qənaətinə gəlinmiş və yüksək EA tələbinin icra intensivliyinin EA həddini minimal saxlaması qeyd edilmişdir.

4. Elmi tədqiqatlar üçün nəzərdə tutulmuş Python Scipy və Apache Commons Math kitabxanalarından istifadə etməklə proqram təminatları yaradılmışdır. Belə ki, fəza iriləşdirilməsi alqoritminin yüksək sürətini nümayiş etdirmək üçün uyğun ədədi eksperiment Java Apache Commons Math kitabxanasından istifadə etməklə kodlaşdırılmışdır. Eyni parametrlər və resurslar üçün stasionar ehtimalların hesablanması dəqiq üsullarla bir neçə saata, təqribi düsturlarla isə bir neçə saniyəyə

başına gəlmişdir. Həmçinin sonsuz Markov zəncirlərinin simulyasiyasında istifadə edilən Gillespie Direct üsulu üçün Python proqramlaşdırma dilində uyğun kod bloku yaradılmışdır. Ədədi eksperimentlər zamanı balans tənliklərinin həlli üçün istifadə edilən Qauss və spektral genişlənmə üsulları üçün də uyğun proqram təminatları yaradılmışdır.

5. Təklif olunan modellərin qida/ərzaq, kimya və dərman sənayesində, qan banklarında və ehtiyat ömrü məhdud olan sistemlərdə tətbiq olunmasının mümkünlüyü qeyd edilmişdir.

Gələcək elmi tədqiqatlar üçün açıq məsələlər

Dissertasiyada təqdim olunan elmi yeniliklər və əldə edilən nəticələr aşağıdakı məsələlərin tədqiq olunması üçün zəmin yaradır:

1. Sonlu və sonsuz Markov zəncirlərinin stasionar paylanmasının və keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması üçün təklif edilən fəza iriləşdirilməsi və iyerarxiyalı fəza iriləşdirilməsi alqoritmləri praktiki cəhətdən səmərəli və analitik üsullar olsa da, onlar təqribi nəticələr verir və metodun dəqiqliyi yalnız ədədi eksperimentlər vasitəsilə isbat edilir. Bu səbəbdən, fəza iriləşdirilməsi alqoritminin təkmilləşdirilməsi, dəqiqliyinin artırılması və xətasının qiymətləndirilməsi üçün analitik üsulların tapılması gələcək elmi tədqiqatlar üçün çox əhəmiyyətli məsələlərdən biridir.

2. Mövcud elmi ədəbiyyatda, həmçinin dissertasiyada tədqiq edilən KXES-lərinin modelləşdirilməsi zamanı sorğuların axınını təsvir etmək üçün, əsasən, Puasson prosesindən istifadə olunur. Bunun əsas səbəbi eksponensial paylanmanın riyazi və fiziki xüsusiyyətləridir. Buna baxmayaraq, praktikada müəyyən hallarda sorğuların daxilolma intensivliyi sabit olmadığından dissertasiyada təklif olunan modellərin dəyişən intensivlikli axınlara (məsələn, MMPP) uyğunlaşdırılması gələcək tədqiqat işləri üçün önəmlidir.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısı

Azərbaycan dilində

1. Cəfərzadə, T.İ. Sıçrayışlı prioritetləri olan bir kütləvi xidmət sistemi modelinin analizi // – Bakı: Milli Aviasiya Akademiyası, Elmi Məcmuələr, – 2013. Cild: 15, №4, – s. 114-121.
2. Şahmalıyev, M.O. Müsbət xidmət vaxtlı müxtəlif sorğulu və ehtiyatları xarab olan sonsuz növbəli anbar idarəetmə sisteminin analizi // – Bakı: Milli Aviasiya Akademiyası, Elmi Məcmuələr, – 2018. Vol. 20, Issue 2, – s. 161-168.

Rus dilində

3. Гнеденко, Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В.Гнеденко, И.Н.Коваленко; – Москва: ЛКИ, – 2012. – 400 с.
4. Шахмалиев, М.О. Расчет характеристик одной системы обслуживания-запасания с конечным временем жизни запасов // – Баку: Milli Aviasiya Akademiyası, Elmi Məcmuələr, – 2016. Vol.18, Issue 2, – с. 121-130.
5. Шахмалиев, М.О. Об одной модели системы обслуживания-запасания с конечным временем жизни запасов // XV Международная конференция им. А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование ИТММ – 2016», – Томск: ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2016), – 2016, – с. 143-147
6. Шахмалиев, М.О. Расчет характеристик системы с портящимися запасами и бесконечной орбитой для повторных заявок // – Баку: Journal of Qafqaz University, Mathematic and Computer Science, – 2016. Vol. 4, Issue 1, – с. 30-39.
7. Шахмалиев, М.О. Алгоритмы расчета характеристик системы с конечным временем жизни запасов и повторными заявками // Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 93-cü ildönümünə həsr olunmuş Gənc Tədqiqatçıların IV Beynəlxalq Elmi Konfransı, – Bakı:, – 2016, Vol. 1, – с. 393-394

İngilis dilində

8. Al Hamadi, H., Sangeetha, N., Sivakumar, B. Optimal control of service parameter for a perishable inventory system maintained at service facility with impatient customers // – New York: Annals of Operations Research, – 2015. Vol. 233, – p. 3-23.
9. Allen, L. An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology / L.Allen. – London: Chapman and Hall/CRC, – 2010. – 496 p.

10. Amirthakodi, M., Radhamani, V., Sivakumar, B. A perishable inventory system with service facility and feedback customers // – New York: Annals of Operations Research, – 2015. Vol. 233, – p. 25-55.
11. Amirthakodi, M., Radhamani, V., Sivakumar, B. A perishable inventory system with service facility and feedback customers // – New York: Annals of Operations Research, – 2015. Vol. 233, Issue 1, – p. 25-55.
12. Amirthakodi, M., Sivakumar, B. An inventory system with service facility and finite orbit size for feedback customers // – New Delhi: OPSEARCH, – 2015. Vol. 52, Issue 2, – p. 225-255.
13. Anbazhagan, N., Wang, J., Gomathi, D. Base stock policy with retrial demands // – Amsterdam: Applied Mathematical Modelling, – 2013. Vol. 37, Issue 6, – p. 4464-4473.
14. Arivarignan, G. Perishable Inventory System with Renewal Demands and $(-r, S)$ Ordering Policy: [Electronic resource] / Stochastic Processes and Their Applications. Amsterdam, 1994. URL: <http://bit.ly/2Sd0gyg>.
15. Bai, P. Stochastic and Deterministic Models for Agricultural Production Networks / P.Bai, H.Banks, S.Dediu [et al.] // Mathematical biosciences and engineering: MBE, – San Jose: – 2007. Vol. 4, Issue 3, – p. 373-402.
16. Baker, H., Ehrhardt, R. A dynamic inventory model with random replenishment quantities // – Amsterdam: Omega, – 1995. Vol. 23, Issue 1, – p. 109-116.
17. Banks, H. Simulation algorithms for continuous time Markov chain models / H.Banks, A.Broido, B.Canter [et al.] // Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics, – Amsterdam: – 2012. Vol. 37, – p. 3-18.
18. Berman, O., Sapna, K. Optimal service rates of a service facility with perishable inventory items // – Annals of Operations Research, – 2002. Vol. 49, – p. 464-482.
19. Berman, O., Sapna, K. Optimal control of service for facilities holding inventory // – Amsterdam: Computers & Operations Research, – 2001. Vol. 28, Issue 5, – p. 429-441.
20. Camarero, C. Simple, Fast and Practicable Algorithms for Cholesky, LU and QR Decomposition Using Fast Rectangular Matrix Multiplication: [Electronic resource] / Universidad de Cantabria. UNICAN, 2015. URL: <http://bit.ly/2RC8Iqt>.
21. Casale, G. Building accurate workload models using Markovian arrival processes // Proceedings of the 2011 ACM SIGMETRICS International Conference on Measurement and Modeling of Computer Systems, – California: ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review, – 2011, Vol. 39, Issue 1, – p. 357-358
22. Chakka, R.. Performance and Reliability Modelling of Computing Systems Using Spectral Expansion: / PhD Thesis. / – Newcastle upon Tyne, 1995. 220 p.

23. Chen, H., Zhou, Z., Liu, M. A queuing-inventory system with two classes demand and subject to selected service // – Nakhon Pathom: Journal of Information and Computational Science, – 2012. Vol. 9, Issue 11, – p. 3081-3089.
24. Daniel, J., Ramanarayanan, R. An inventory system with two servers and rest periods // – Bruxelles: Cahiers du C.E.R.O, Universite Libre De Bruxelles, – 1987. – p. 95-100.
25. Daniel, J., Ramanarayanan, R. An (s,S) inventory system with rest periods to the server // – New York: Naval Research Logistics, – 1988. Vol. 35, Issue 1, – p. 119-123.
26. Dhar, P. Cellware--a multi-algorithmic software for computational systems biology / P.Dhar, T.Chee, S.Somani [et al.] // Bioinformatics, – London: – 2004. Vol. 20, Issue 8, – p. 1319-1321.
27. Erlang, A.K. Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges // – London: Post Office Electrical Engineer's Journal, – 1917. Vol. 10, – p. 189-197.
28. Ertogral, K., Rahim, M. Replenish-up-to inventory control policy with random replenishment intervals // – Amsterdam: International Journal of Production Economics, – 2005. Vol. 93–94, – p. 399-405.
29. Fischer, W., Meier-Hellstern, K. The Markov-modulated Poisson process (MMPP) cookbook // – Amsterdam: Performance Evaluation, – 1993. Vol. 18, Issue 2, – p. 149-171.
30. Gagniuc, P.G. Markov Chains: From Theory to Implementation and Experimentation / P.G.Gagniuc. – New York: Wiley, – 2017. – 256 p.
31. Gibson, M., Bruck, J. Efficient Exact Stochastic Simulation of Chemical Systems with Many Species and Many Channels // – Washington: The Journal of Physical Chemistry A, – 2000. Vol. 104, Issue 9, – p. 1876-1889.
32. Gillespie, D. A general method for numerically simulating the stochastic time evolution of coupled chemical reactions // – Amsterdam: Journal of Computational Physics, – 1976. Vol. 22, Issue 4, – p. 403-434.
33. Gillespie, D. Approximate Accelerated Stochastic Simulation of Chemically Reacting Systems // – Maryland: The Journal of Chemical Physics, – 2001. Vol. 115, – p. 1716-1733.
34. Goswami, C., Selvaraju, N. A working vacation queue with priority customers and vacation interruptions // – Geneva: International Journal of Operational Research, – 2013. Vol. 17, Issue 3, – p. 311-332.
35. Graves, S. The Application of Queueing Theory to Continuous Perishable Inventory Systems // – Baltimore: Management Science, – 1982. Vol. 28, Issue 4, – p. 400-406.

36. Fundamentals of Queueing Theory, 4th Edition / D.Gross, J.F.Shortle, J.Thompson [et al.]. – New York: Wiley-Interscience, – 2008. – 528 p.
37. Isotupa, S. Cost analysis of an (S–1,S) inventory system with two demand classes and rationing // – New York: Annals of Operations Research, – 2015. Vol. 233, Issue 1, – p. 411-421.
38. Janssen, L., Claus, T., Sauer, J. Literature review of deteriorating inventory models by key topics from 2012 to 2015 // – Amsterdam: International Journal of Production Economics, – 2016. Vol. 182, Issue 2016, – p. 86-112.
39. Jayaraman, R., Sivakumar, B., Arivarignan, G. A Perishable Inventory System with Postponed Demands and Multiple Server Vacations // – London: Modelling and Simulation in Engineering, – 2012. – 17 p.
40. Jeganathan, K. Analysis of Two Queues in Parallel with Mixed Priority Service and A Finite Population // – Kahtmandu: International Journal of Operational Research Nepal (IJORN), – 2016. Vol. 5, Issue 3, – p. 15-43.
41. Kalpakam, S., Sapna, K. (S – 1,S) Perishable systems with stochastic leadtimes // – Amsterdam: Mathematical and Computer Modelling, – 1995. Vol. 21, Issue 6, – p. 95-104.
42. Karthikeyan, K., Sudhesh, R. Recent review article on queueing inventory systems // – Raipur: Research Journal of Pharmacy and Technology, – 2016. Vol. 9, Issue 11, – p. 2056-2066.
43. Kendall, D.J. Some problems in the theory of queues // – New York: Journal of Royal Statistical Society, Series B, – 1951. Vol. 13, Issue: 2, – p. 151-173.
44. Kendall, D. Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain // – Michigan: The Annals of Mathematical Statistics, – 1953. Vol. 24, Issue 3, – p. 338-354.
45. Koroliuk, V. Methods for Analysis of Multi-Channel Queueing System with Instantaneous and Delayed Feedbacks / V.Koroliuk, A.Z.Melikov, L.Ponomarenko [et al.]// Cybernetics and Systems Analysis, – New York: – 2016. Vol. 52, Issue 1, – p. 58-70.
46. Kranenburg, A., Houtum, G. Cost optimization in the (S-1,S) lost sales inventory model with multiple demand classes // – Operations Research Letters, – 2007. Vol. 35, Issue 4, – p. 493-502.
47. Krishnamoorthy, A., Shajin, D. MAP/PH/1 Retrial Queueing-Inventory System with Orbital Search and Reneging of Customers // International Conference on Analytical and Computational Methods in Probability Theory, – Moscow: Analytical and Computational Methods in Probability Theory, – 2017, – p. 158-171

48. Krishnamoorthy, A., Jose, K.P. Comparison of Inventory Systems with Service, Positive Lead-Time, Loss, and Retrial of Customers // – London: Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, – 2007. – p. 20-43.
49. Krishnamoorthy, A., Islam, M. (s, S) Inventory System with Postponed Demands // – London: Stochastic Analysis and Applications, – 2004. Vol. 22, Issue 3, – p. 827-842.
50. Krishnamoorthy, A., Manikandan, R., Lakshmy, B. A revisit to queueing-inventory system with positive service time // – New York: Annals of Operations Research, – 2015. Vol. 233, Issue 1, – p. 221-236.
51. Krishnamoorthy, A., Manikandan, R., Shajin, D. Analysis of a Multiserver Queueing-Inventory System // – London: Advances in Operations Research, – 2015. – 16 p.
52. Last, G., Penrose, M. Light traffic heuristic for an M/G/1 queue with limited inventory: [Electronic resource] / IMS Textbook by Cambridge University Press. London, 2017. URL: <http://bit.ly/34vSL8f>.
53. Manning, C.D., Raghavan, P., Schütze, H. Introduction to Information Retrieval: [Electronic resource] / Cambridge University Press. London, 2009. URL: <https://stanford.io/2Qd9xnl>.
54. Manuel, P., Sivakumar, B., Arivarignan, G. A perishable inventory system with service facilities, MAP arrivals and PH Service times // – Journal of Systems Science and Systems Engineering, – 2007. Vol. 16, Issue 1, – p. 62-73.
55. Manuel, P., Sivakumar, B., Arivarignan, G. A perishable inventory system with service facilities and retrial customers // – Amsterdam: Computers & Industrial Engineering, – 2008. Vol. 54, Issue 3, – p. 484-501.
56. Manuel, P., Sivakumar, B., Arivarignan, G. Perishable Inventory System with Postponed Demands and Negative Customers // – London: Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences, – 2007. – 12 p.
57. McAdams, H., Arkin, A. Stochastic mechanisms in gene expression. Proc Natl Acad Sci USA // – Proceedings of the National Academy of Sciences, – 1997. Vol. 94, Issue 3, – p. 814-819.
58. Melikov, A.Z., Molchanov, A.A. Stock optimization in transportation/storage systems // – New York: Cybernetics and Systems Analysis, – 1992. Vol. 28, Issue 3, – p. 484-487.
59. Melikov, A.Z., Zadiranova, L., Moiseev, A. Two Asymptotic Conditions in Queue with MMPP Arrivals and Feedback // International Conference on Distributed Computer and Communication Networks (DCCN 2016), – Moscow: Distributed Computer and Communication Networks, – 2017, – p. 231-240
60. Melikov, A.Z., Krishnamoorthy, A., Shahmaliyev, M.O. Perishable Queuing Inventory Systems with Delayed Feedback // International Conference on

- Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM 2018), – Tomsk: Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications, – 2018, – p. 55-70
61. Melikov, A.Z., Krishnamoorthy, A., Shahmaliyev, M.O. Numerical Analysis and Long Run Total Cost Optimization of Perishable Queueing Inventory Systems with Delayed Feedback // – Taichung: Queueing Models and Service Management, – 2019. Vol. 2, Issue 1, – p. 83-111.
 62. Melikov, A.Z., Ponomarenko, L., Shahmaliyev, M.O. Analysis of perishable queueing-inventory systems with different types of requests // – New York: Journal of Automation and Information Sciences, – 2017. Vol. 49, Issue 9, – p. 42-60.
 63. Melikov, A.Z., Shahmaliyev, M.O. Analysis of Perishable Queueing-Inventory System with Positive Service Time and (S-1,S) Replenishment Policy // International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling, – Kazan: Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications, – 2017, – p. 83-96
 64. Melikov, A.Z., Ponomarenko, L., Bagirova, S.A. Markov Models of Queueing–Inventory Systems with Variable Order Size // – New York: Cybernetics and Systems Analysis, – 2017. Vol. 53, Issue 3, – p. 373-386.
 65. Melikov, A.Z., Ponomarenko, L., Shahmaliyev, M.O. Models of Perishable Queueing-Inventory System with Repeated Customers // – New York: Journal of Automation and Information Sciences, – 2016. Vol. 48,, Issue 6, – p. 22-38.
 66. Melikov, A.Z., Shahmaliyev, M.O. Markov Models of Inventory Management Systems with a Positive Service Time // – Berlin: Journal of Computer and Systems Sciences International, – 2018. Vol. 57, Issue 5, – p. 766-783.
 67. Melikov, A.Z., Shahmaliyev, M.O. Queueing System M/M/1/∞ with Perishable Inventory and Repeated Customers // – Berlin: Automation and Remote Control, – 2019. Vol. 80, Issue 1, – p. 53-65.
 68. Melikov, A.Z., Ponomarenko, L., Rustamov, A. Hierarchical Space Merging Algorithm for the Analysis of Open Tandem Queueing Networks // – New York: Cybernetics and Systems Analysis, – 2016. Vol. 52, Issue 6, – p. 867-877.
 69. Melikov, A.Z., Ponomarenko, L.A., Kim, C. Approximate method for analysis of queueing models with jump priorities // – Berlin: Stochastic Systems, Queueing Systems, – 2013. Vol. 74, Issue 1, – p. 62-75.
 70. Melikov, A., Shahmaliyev, M. Analysis of perishable queueing-inventory system with different types of demands and various replenishment policies // Azərbaycan Xalq Cümhuriyyətinin 100 illik yubileyinə həsr olunmuş İnformasiya Sistemləri və Texnologiyalar. Nailiyyətlər və Perspektivlər Beynəlxalq Elmi konfransın materialları. Sumqayıt, – Baku:, – 2018, – p. 6-7

71. Melikov, A., Ponomarenko, L., Rustamov, A. Methods for Analysis of Queueing Models with Instantaneous and Delayed Feedbacks // International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM 2015), – Anzhero-Sudzhensk: Information Technologies and Mathematical Modelling - Queueing Theory and Applications, – 2015, – p. 185-199
72. Mitrani, I., Chakka, R. Spectral expansion solution for a class of Markov models: application and comparison with the matrix-geometric method // – Amsterdam: Performance Evaluation, – 1995. Vol. 23, Issue 3, – p. 241-260.
73. Mitrani, I., King Multiserver Systems Subject to Breakdowns: An Empirical Study // – New York: IEEE Transactions on Computers, – 1983. Vol. C-32, Issue 1, – p. 96-98.
74. Nair, A.N., Jacob, M.J. (s,S) Inventory with Positive Service Time and Retrial of Demands: An Approach through Multiserver Queues // – London: ISRN Operations Research, – 2014. – 6 p.
75. Narayanan, V. On an (s, S) Inventory Policy with Service Time, Vacation to Server and Correlated Lead Time / V.Narayanan, T.Deepak, A.Krishnamoorthy [et al.] // Quality Technology & Quantitative Management, – London: – 2008. Vol. 5, Issue 2, – p. 129-143.
76. Neuts, M. Matrix-geometric solutions in stochastic models : an algorithmic approach / M.Neuts. – Baltimore: Johns Hopkins University Press, – 1981. – 332 p.
77. Neuts, M., Lucantoni, D. A Markovian Queue with N Servers Subject to Breakdowns and Repairs // – Baltimore: Management Science, – 1979. Vol. 25, Issue 9, – p. 813-930.
78. Ortiz, A. A Deterministic Methodology for Estimation of Parameters in Dynamic Markov Chain Models / A.Ortiz, H.Banks, C.Castillo-Chávez [et al.] // Journal of Biological Systems, – Singapore: – 2011. Vol. 19, Issue 01, – p. 71-100.
79. Padmavathi, I., Lawrence, A., Sivakumar, B. A finite-source inventory system with postponed demands and modified M vacation policy // – New Delhi: OPSEARCH, – 2016. Vol. 53, Issue 1, – p. 41-62.
80. Ponomarenko, L. Performance Analysis and Optimization of Multi-Traffic on Communication Networks / L.Ponomarenko, C.Kim, A.Z.Melikov; – New York: Springer, – 2010. – 194 p.
81. Pérez, J.F., Van Houdt, B. Quasi-birth-and-death processes with restricted transitions and its applications // – Amsterdam: Performance Evaluation, – 2011. Vol. 68, Issue 2, – p. 126-141.
82. Ravichandran, N. Probabilistic analysis of a continuous review perishable inventory system with Markovian demand, Erlangian life and non-instantaneous

- lead time // – Berlin: Operations-Research-Spektrum, – 1988. Vol. 10, Issue 1, – p. 23-27.
83. Saffari, M., Asmussen, S., Haji, R. The M/M/1 queue with inventory, lost sale, and general lead times // – New York: Queueing Systems, – 2013. Vol. 75, Issue 1, – p. 65-77.
 84. Schwarz, M., Daduna, H. Queueing systems with inventory management with random lead times and with backordering // – Berlin: Mathematical Methods of Operations Research, – 2006. Vol. 64, Issue 3, – p. 383-414.
 85. Seelen, L. An algorithm for Ph/Ph/c queues // – Amsterdam: European Journal of Operational Research, – 1986. Vol. 23, Issue 1, – p. 118-127.
 86. Seyedhoseini, S. Application of queuing theory in inventory systems with substitution flexibility / S.Seyedhoseini, R.Rashid, I.Kamalpour [et al.] // Journal of Industrial Engineering International, – Berlin: – 2015. Vol. 11, Issue 1, – p. 37-44.
 87. Shahmaliyev, M. Simulation model of infinite perishable queueing inventory system with feedback // – Kiev: Control Systems and Computers, – 2018. Vol. 3 (275), – p. 60-68.
 88. Shophia Lawrence, A., Sivakumar, B., Arivarignan, G. A perishable inventory system with service facility and finite source // – Amsterdam: Applied Mathematical Modelling, – 2013. Vol. 37, Issue 7, – p. 4771-4786.
 89. Sigman, K., Simchi-Levi, D. Light traffic heuristic for an M/G/1 queue with limited inventory // – New York: Annals of Operations Research, – 1992. Vol. 40, Issue 1, – p. 371-380.
 90. Singhal, A. Modern Information Retrieval: A Brief Overview // – New York: Bulletin of the IEEE Computer Society Technical Committee on Data Engineering, – 2001. Vol. 24, Issue 4, – p. 35-43.
 91. Sivakumar, B. An Inventory System with Retrial Demands and Multiple Server Vacation // – London: Quality Technology & Quantitative Management, – 2011. Vol. 8, Issue 2, – p. 125-146.
 92. Sivakumar, B., Arivarignan, G. A perishable inventory system at service facilities with negative customers // – International Journal of Information and Management Sciences, – 2005. Vol. 7, Issue 2, – p. 193-210.
 93. Sivakumar, B., Arivarignan, G. An Inventory System with Postponed Demands // – London: Stochastic Analysis and Applications, – 2007. Vol. 26, Issue 1, – p. 84-97.
 94. Sivakumar, B., Jayaraman, R., Arivarignan, G. A discrete time inventory system with postponed demands // – Amsterdam: Journal of Computational and Applied Mathematics, – 2012. Vol. 236, Issue 13, – p. 3073-3083.

95. Sivakumar, B. A perishable inventory system with retrial demands and a finite population // – Amsterdam: Journal of Computational and Applied Mathematics, – 2009. Vol. 224, Issue 1, – p. 29-38.
96. Sivakumar, B., Elango, C., Arivarignan, G. A perishable inventory system with service facilities and batch Markovian demands // – Sofia: International Journal of Pure and Applied Mathematics, – 2006. Vol. 32, Issue 1, – p. 33-51.
97. Takács, L. A single-server queue with feedback // – New Jersey: The Bell System Technical Journal, – 1963. Vol. 42, Issue 2, – p. 505-519.
98. Takács, L. A queuing model with feedback // – Operations Research, – 1977. Vol. 11, Issue 4, – p. 345-354.
99. Townsend, A., Trefethen, L.N. Continuous analogues of matrix factorizations // – London: Proceedings of the Royal Society, – 2015. – 21 p.
100. Tsay, A. The Quantity Flexibility Contract and Supplier-Customer Incentives // – Baltimore: Management Science, – 1999. Vol. 45, Issue 10, – p. 1289-1462.
101. Wattenhofer, R. Queueing Theory: [Electronic resource] / Discrete Event Systems (HS 2015). Zurich, 2015. URL: <http://bit.ly/2RBZzy9>.
102. Wilkinson, D.J. Stochastic modelling for quantitative description of heterogeneous biological systems // – London: Nature Reviews Genetics, – 2009. Vol. 10, Issue 2, – p. 122-133.
103. Yadavalli, V.S. A multi-server perishable inventory system with negative customer / V.S.Yadavalli, B.Sivakumar, G.Arivarignan [et al.] // Computers & Industrial Engineering, – Amsterdam: – 2011. Vol. 61, Issue 2, – p. 254-273.
104. Zhao, N., Lian, Z. A queueing-inventory system with two classes of customers // – Amsterdam: International Journal of Production Economics, – 2011. Vol. 129, Issue 1, – p. 225-231.

Fransız dilində

105. Jaccard, P. Etude de la distribution florale dans une portion des Alpes et du Jura // – Paris: Bulletin de la Societe Vaudoise des Sciences Naturelles, – 1901. Vol. 37, Issue 142, – p. 547-579.

İxtisarlardan və şərti işarələrin siyahısı

EA – Ehtiyatların artırılması

EX-KXES – Ehtiyatları xarab olan Kütləvi Xidmət-Ehtiyatlanma Sistemləri

KXS – Kütləvi Xidmət Sistemləri

KXES – Kütləvi Xidmət-Ehtiyatlanma Sistemləri

KZMZ – Kəsilməz zamanlı Markov zəncirləri

MAP – Markovian arrival process (Markov daxilolma prosesi)

MMPP – Markov-modulated Poisson process (Markov modulyasiyalı Puasson prosesi)

MS/(s, S) – Müxtəlif sorğulu (s, S) EA qaydası tətbiq olunan model

MS/(m, S) – Müxtəlif sorğulu dəyişən (s, S – m) EA qaydası tətbiq olunan model

MS/(S-1, S) – Müxtəlif sorğulu (S – 1, S) EA qaydası tətbiq olunan model

PQIS/DFB – Gecikən əks əlaqəli üçölçülü EX-KXES modeli

PQIS/RC – Təkrar sorğulu sonsuz üçölçülü M/M/1/∞ EX-KXES modeli

QoS – Quality of Service (keyfiyyət göstəriciləri)

SG – Spektral Genişlənmə alqoritmi

VSO – Variable size order (Dəyişən ölçülü EA tələbi)